

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Uno studio teorico simulativo della propagazione di modi con momento angolare orbitale in fibra ottica

Relatore:
Prof. Filippo Romanato

Laureando:
Riccardo Gonzo
Matricola 1050008

Correlatore:
dott. Enrico Gazzola

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Premessa	1
2	Momento angolare orbitale e spin: caratterizzazione teorica e sperimentale	2
2.1	Formulazione generale del momento angolare in CED	2
2.2	Separabilità dei contributi di spin e orbitali al momento angolare totale	4
2.3	Caratterizzazione e trasporto del momento angolare orbitale in fasci ottici, vortici ottici e carica topologica	7
2.4	Stati OAM e premessa alla QKD	12
3	La fibra ottica come moderno sistema di comunicazione	17
3.1	Sviluppo storico della fibra ottica fino ai giorni nostri	17
3.2	Struttura del canale di comunicazione basato sulla fibra ottica	19
4	Caratteristiche fondamentali di una fibra ottica	24
4.1	Fibra ottica single-core (SCF)	30
4.2	Ring-core fiber e Step-index fiber	32
4.3	Analisi modale del campo EM in fibra ottica e modi OAM	35
4.4	Principi fisici di funzionamento della fibra a cristalli fotonici (PCF) .	41
5	Modellizzazione e simulazione della propagazione di modi in fibra ottica . .	43
5.1	Risultati dei modelli COMSOL	43
5.2	Rappresentazione dei modi OAM	51
5.3	Soluzione delle condizioni di cutoff dei modi per le geometrie SCF e RCF	52

Ai miei genitori, con affetto

1 Premessa

“Begin at the beginning,” the King said gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Questo lavoro è dedicato allo studio della propagazione dei modi in fibra ottica, con particolare riguardo a quei modi che trasportano momento angolare orbitale. Dopo una presentazione introduttiva del significato fisico del momento angolare orbitale nelle varie branche della fisica nella sezione 2, verrà spiegato in modo esteso l'applicazione di tale concetto ai modi del campo EM, intesi come soluzione di un'opportuna equazione. Nella successiva sezione 3, dopo una breve nota di carattere storico, verranno presentati rapidamente i sistemi di comunicazione in fibra ottica, per prendere confidenza con la terminologia e immergere il contesto fisico nelle applicazioni attuali. La vera spiegazione del funzionamento della fibra ottica sarà evidenziata in modo teorico esteso nella sezione 4, ove saranno anche presentate le diverse geometrie oggetto di studio. In particolare ci si focalizzerà, anche dal punto di vista analitico, sullo studio di geometrie del tipo *step-index fiber*, *ring-core fiber* e *photonic crystal fiber*. La sezione 5 conclusiva permetterà di comprendere meglio lo sviluppo teorico precedente per mezzo di alcune simulazioni dettagliate con le geometrie proposte abbinate a parametri realistici. Il software COMSOL Multiphysics sarà utilizzato per un'analisi di tipo modale, che permetterà una caratterizzazione completa dei modi in fibra per tutte le geometrie analizzate, mentre sarà implementato un programma MATLAB per risolvere numericamente le equazioni relative alle condizioni di cutoff dei modi stessi per le *step-index fiber* e le *ring-core fiber*.

2 Momento angolare orbitale e spin: caratterizzazione teorica e sperimentale

2.1 Formulazione generale del momento angolare in CED

In meccanica classica, fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ per un sistema di n particelle puntiformi $(\mathbf{r}_1, m_1), \dots, (\mathbf{r}_n, m_n)$, la definizione standard di momento angolare rispetto ad un punto Q con coordinate \mathbf{r}_Q è $\mathbf{L}(\mathbf{r}_Q) = \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{v}_k$, ove $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$ è la quantità di moto della particella k -esima. Tale espressione viene poi generalizzata anche per un corpo continuo: definendo la quantità di moto di un elemento infinitesimo dV del sistema come $dm\mathbf{v} = \rho dV\mathbf{v}$, e indicando con \mathbf{r} il vettore posizione di tale elemento rispetto ad un punto Q , possiamo definire il momento angolare del volume finito V come $\mathbf{L}(Q) = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho(\mathbf{r}) dV$. L'importanza della definizione di questa grandezza fisica \mathbf{L} risiede nella formulazione delle *equazioni cardinali* per la meccanica [1], e più in generale di *equazioni di bilancio* (fluidodinamica, meccanica dei solidi). L'approccio lagrangiano rivela un'altra natura più profonda del momento angolare: se \mathbf{q} sono le coordinate generalizzate di una configurazione M , $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ risulta un *integrale primo* delle equazioni di Lagrange associate a ben determinati sistemi lagrangiani. Se $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : TM \rightarrow R$ è la lagrangiana, dal teorema di Noether discende proprio che l'invarianza di $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $\phi(\lambda) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (azione di \mathbb{S}^1 su \mathbb{R}^3) attorno ad un asse \hat{a} determina che $L_a := \mathbf{L} \cdot \hat{a}$ sia un integrale primo delle equazioni di Lagrange.

Nell'elettromagnetismo classico (CED), per poter disporre di *leggi di conservazione* analoghe a quelle della meccanica classica, siamo costretti a ipotizzare che oltre alle particelle anche il campo EM trasporti quantità di moto \mathbf{p}_{em} , in modo che $\mathbf{p}_{mech} + \mathbf{p}_{em}$ sia costante per sistemi isolati. Vari esempi teorici possono essere portati a supporto, ove assumiamo che il sistema complessivo sia sempre isolato: si possono considerare una coppia di cariche puntiformi libere in reciproca interazione [2], oppure il caso di un'onda EM piana che trasferisce energia a tasso costante ad una carica puntiforme facendola oscillare [3]. Evidenze sperimentali sul fatto che il campo EM trasporti quantità di moto risalgono a più di un secolo fa a Lebedew (il primo in assoluto) [4] e Nichols e Hull [5], che si occuparono di misurare la pressione di radiazione su un corpo solido e di confrontare i loro risultati con le previsioni teoriche di J.C.Maxwell [6].

Siano $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ campo elettrico e magnetico rispettivamente, ρ densità di carica e \mathbf{j} densità di corrente: allora le equazioni di Maxwell nel sistema MKS sono

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2)$$

Consideriamo d'ora in poi un sistema localizzato nello spazio¹, e definiamo la quantità di moto del campo EM nel vuoto² come [2] [7]

$$\mathbf{p}_{em} = \int_V \mathbf{g} d^3\mathbf{r} \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

¹assumiamo cioè che tutti i campi si annullino con sufficiente rapidità all'infinito affinché le seguenti scritte siano ben definite e gli integrali siano convergenti; quando parliamo di campo uniforme si deve intendere nel senso di *localmente* uniforme sul sistema

²solo in questo caso la nozione di quantità di moto del campo EM è intrinsecamente non ambigua. In presenza di materia vi sono due possibili definizioni di quantità di moto del campo EM, quella di Abraham $\mathbf{g}_A = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ e quella di Minkowski $\mathbf{g}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$: il cuore della questione è legato al fatto che solo il tensore energia-impulso *totale* del sistema porta un significato fisico non ambiguo [6]

ove $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è la definizione standard del vettore di Poynting. In questo modo risulta soddisfatta l'equazione di bilancio (in forma globale per un volume V di superficie esterna Σ , e in forma locale) per la quantità di moto delle particelle e del campo EM

$$\frac{\partial(\mathbf{p}_{\text{em}} + \mathbf{p}_{\text{mech}})}{\partial t} = \int_{\Sigma} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Sigma \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = -(\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (5)$$

ove il tensore di rango 2 $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ viene detto tensore degli sforzi di Maxwell e ha come componenti $T_{ij} = \epsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$. Un'equazione di bilancio simile vale anche per l'energia del sistema:

$$\frac{\partial(E_{\text{em}} + E_{\text{mech}})}{\partial t} = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Sigma \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (7)$$

con $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ densità di energia del campo EM.

In generale con un formalismo di tipo covariante prettamente relativistico, sottointendendo nel seguito di lavorare con coordinate cartesiane spazio-temporali $x^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3)$ e con la metrica piatta di Minkowski $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, possiamo raggruppare le grandezze fisiche densità di energia u , densità di quantità di moto \mathbf{g} , flusso di energia \mathbf{S} e tensore degli sforzi (o densità di corrente di quantità di moto) $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ di un sistema in un unico oggetto [6]

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} u & [\frac{\mathbf{S}}{c}] \\ [c\mathbf{g}] & -[\overleftrightarrow{\mathbf{T}}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

detto tensore energia-impulso. Quest'ultimo è associato a ciascuna delle 4 componenti del cosiddetto quadriimpulso $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ ³ mediante le leggi di conservazione 4 5 7 8: risulta infatti $p_V^\nu = \int_V \Theta^{0\nu} \, d^3\mathbf{r}$.

Nel caso dell'elettrodinamica classica si possono definire una quadricorrente $J^\mu = (\rho c, j_x, j_y, j_z)$ e il tensore di Maxwell di rango 2 totalmente antisimmetrico $F^{\mu\nu}$ tale che $F^{00} = 0$, $F^{i0} = E^i/c$ e $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$ in modo da riscrivere le equazioni di Maxwell nella forma [8]

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \quad (\text{Identità di Bianchi}) \quad (10)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} J^\nu \quad (11)$$

Per il lemma di Poincarè applicato all'identità di Bianchi esiste un campo vettoriale A^μ tale che la soluzione si possa esprimere nella forma $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$: la prima equazione risulta in tal modo identicamente soddisfatta. Tuttavia il potenziale vettore risulta determinato soltanto a meno di trasformazioni di gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, ove Λ è un campo scalare: utilizzeremo nel seguito la gauge covariante di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Osserviamo anche che ponendo $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$, ove ϕ è il potenziale scalare e \mathbf{A} il potenziale vettore, possiamo riesprimere anche i campi nella forma $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ e $\mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{A}$.

³ $p^\mu = p_{\text{em}}^\mu + p_{\text{mech}}^\mu$

A questo punto diventa naturale pensare che, oltre all'energia E e alla quantità di moto \mathbf{p}_{em} , al campo EM sia associato anche un momento angolare \mathbf{L}_{em} . In totale analogia al caso meccanico, definiamo per un sistema localizzato nello spazio

$$\mathbf{L}_{\text{em}} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d^3\mathbf{r} \quad \mathbf{g} = \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

Utilizzando 4 e 5 possiamo direttamente scrivere un'equazione di bilancio anche per la densità di momento angolare del sistema particelle+campo EM:

$$\frac{\partial(\mathbf{L}_{\text{em}} + \mathbf{L}_{\text{mech}})}{\partial t} = - \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}) \, d\Sigma \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{r} \times \mathbf{g})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (14)$$

L'estensione quadrivettoriale del momento angolare [8] porta alla definizione di una grandezza fisica tensoriale completamente antisimmetrica⁴ $L^{\alpha\beta}$ e definita, analogamente al caso del quadriimpulso p^μ , a partire da una densità di corrente di momento angolare⁵ $M^{\mu\alpha\beta}$. Risulta in effetti⁶ $M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha\Theta^{\mu\beta} - x^\beta\Theta^{\mu\alpha}$ e $L^{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} M^{0\alpha\beta} \, d\mathbf{x}$. Se $\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0$, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e i campi tendono a zero con sufficiente rapidità all'infinito spaziale allora $L^{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico di rango 2 che si conserva (così come tutte le sue componenti).

Prima di introdurre la descrizione quanto-meccanica, ricordiamo che è possibile nel caso dell'elettromagnetismo classico scrivere una densità di lagrangiana del sistema $\mathcal{L}_{\text{CED}} = -\frac{1}{4\epsilon_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J^\mu A_\mu$ in modo che le equazioni di Lagrange che discendano da essa siano 10. Purchè siano soddisfatte le equazioni di Lagrange, il teorema di Noether sancisce quindi che l'invarianza dell'azione relativistica $S = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}_{\text{CED}}(x^\mu, A^\mu, \partial_\nu A^\mu) \, d^4x$ sotto una trasformazione infinitesima (globale) dei campi e delle coordinate spazio-temporali corrisponde a una corrente conservata (on shell) J^μ , tale cioè che $\partial_\mu J^\mu = 0$. Applicando tale teorema alla lagrangiana del campo EM libero (nel vuoto) $\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4\epsilon_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ troviamo, sfruttando l'invarianza dell'azione sotto traslazioni spazio-temporali e trasformazioni di Lorentz, la conservazione delle correnti canoniche⁷ $T_{\text{can}}^{\mu\nu}$ e $M_{\text{can}}^{\mu\alpha\beta}$. Le 10 cariche di Noether sono P^μ e $L^{\alpha\beta}$: la definizione di momento angolare moderna che verrà poi utilizzata anche in QED discende quindi direttamente dal concetto di carica di Noether, e ne costituisce un notevole ampliamento.

2.2 Separabilità dei contributi di spin e orbitali al momento angolare totale

Dal punto di vista della QED, il campo EM libero può essere pensato come un ensemble di particelle -chiamate fotoni- con energia $E = \hbar\omega$ e quantità di moto $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{n}}\frac{\hbar\omega}{c}$, consistentemente con la trattazione relativistica per particelle di massa nulla che si muovono alla

⁴tale che $L^{\alpha\beta} = -L^{\beta\alpha}$

⁵tale che $M^{\mu\alpha\beta} = -M^{\mu\beta\alpha}$

⁶La costruzione diretta ma euristica del tensore energia-impulso *del campo EM* attraverso le equazioni di Maxwell 10 porta all'espressione [8] $T_{\text{em, sym}}^{\mu\nu} = \epsilon_0(g^{\mu\kappa}F_{\kappa\lambda}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$. Notiamo subito che $T_{\text{em, sym}}^{\mu\nu} = T_{\text{em, sym}}^{\nu\mu}$, aspetto decisivo per una teoria relativistica *classica*. Se consideriamo anche i contributi non elettromagnetici (ad esempio quelli delle particelle) al tensore energia-impulso totale $\Theta_{\text{tot}}^{\mu\nu}$ e li denotiamo con $\Theta_0^{\mu\nu}$, allora da un risultato importante (a volte noto come teorema di Von Laue) segue che se $\partial_\mu \Theta_{\text{tot}}^{\mu\nu} = 0$ e vale l'ipotesi iniziale per cui il campo EM si annulla all'infinito con sufficiente rapidità allora il quadriimpulso *totale* $p^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} \Theta_{\text{tot}}^{\mu 0} \, d^3\mathbf{r}$ ($\Theta_{\text{tot}}^{\mu\nu} = \Theta_0^{\mu\nu} + T_{\text{em}}^{\mu\nu}$) trasforma come un quadrivettore ed è conservato.

⁷Le correnti così ottenute sono dette canoniche e differiscono da quelle derivate euristicamente dalle 1, presentando vari problemi come la non invarianza di gauge e la non simmetria del tensore energia-impulso. Le loro espressioni possono tuttavia essere rimaneggiate con la procedura di simmetrizzazione di Belinfante in modo da riottenere le espressioni standard con significato fisico proprio

velocità della luce c [9]. Queste particelle, come è stato anche mostrato sperimentalmente in modo esplicito [10], possiedono inoltre un momento angolare intrinseco -di spin- S pari a 1. Dall'approccio quantistico risulta quindi che il campo EM può trasportare anche momento angolare di spin (**SAM**) oltre ai contributi orbitali al momento angolare (**OAM**), come è stato confermato sperimentalmente dal famoso paradosso di Beth del 1936 [11]. Considerata una lamina birfrangente come in figura 1 su cui incide lungo un asse z un fascio di luce (di estensione finita) polarizzato circolarmente di frequenza ν e potenza P , visto che il fascio di luce cambia la sua polarizzazione, vi dovrebbe essere un momento torcente τ agente sulla lamina, e sperimentalmente risulta $\tau = \frac{4\pi P}{\nu}$. Secondo Beth e Feynman [12], dal punto di vista quantistico se l'energia totale del fascio è E ad un certo istante, vi saranno $N = \frac{E}{\hbar\omega}$ fotoni, ognuno con momento angolare \hbar , cosicchè vi è un momento angolare totale $J = N\hbar = \frac{E}{\omega}$. In generale il campo elettrico \mathbf{E} nella lamina non è parallelo al vettore di polarizzazione \mathbf{P} (ossia il tensore dielettrico ϵ_{ij} ha componenti diagonali non nulle), e si può ricavare la formula $\frac{dJ_z}{dE} = \frac{1}{\omega}$ per la variazione del momento angolare totale (dovuta alla presenza della lamina) seguendo anche la trattazione classica [13], consistentemente con quanto ricavato sopra. Tuttavia la spiegazione risulta incompleta, perchè è necessario trovare un'espressione per la densità di flusso di momento angolare in funzione dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} ⁸. In quest'ottica, risulta necessario considerare esplicitamente nella teoria classica il contributo di spin al tensore densità di flusso $S^{\mu\alpha\beta}$ e, se possibile, separarlo dal contributo orbitale.

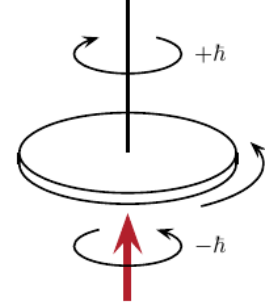


Figura 1: Rappresentazione schematica del paradosso di Beth con una lamina birfrangente a mezz'onda

È necessario a questo punto introdurre una simmetria importante delle equazioni di Maxwell nel vuoto, il gruppo ad un parametro di trasformazioni di dualità di Heaviside-Larmor-Rainich [14]

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}\cos(\theta) + \mathbf{B}\sin(\theta) \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}\cos(\theta) - \mathbf{E}\sin(\theta) \quad (15)$$

ove θ è un angolo di mixing (parametro pseudoscalare)⁹. Questa simmetria duale è strettamente legata all'elicità del fotone h , definita come la proiezione del momento angolare di spin \mathbf{S} nella direzione della quantità di moto $\hat{\mathbf{p}}$, ossia $h = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|}$ ¹⁰

Se consideriamo la lagrangiana del campo elettromagnetico libero $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\epsilon_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, notiamo che essa non è invariante sotto la trasformazione duale 15. Allora anche le correnti di Noether e le leggi di conservazione ad esse associate sono asimmetriche dal punto di vista della trasformazione di dualità: in particolare $T_{can}^{\mu\nu}$ e $M_{can}^{\mu\alpha\beta}$ lo sono. Quindi vi è una discrepanza fondamentale tra le simmetrie di \mathcal{L}_{EM} e le equazioni di campo *nel vuoto* ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$)¹, che si manifesta in una inconsistenza nella definizione di elicità e delle

⁸osserviamo che un'onda piana EM possiede secondo 12 un momento angolare nullo in ogni direzione, compresa la direzione di propagazione

⁹L'accoppiamento con la materia rompe esplicitamente la simmetria [14] [15]

¹⁰Questa definizione utilizzata nella fisica delle particelle si può ricavare, più in generale, da un approccio di tipo *grupitale*. Considerata la classificazione delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincarè \mathcal{P} , dallo pseudovettore di Pauli-Lubanski $w_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu L^{\rho\sigma}$ costruito con gli operatori quadrimomento P^ν e momento angolare $L^{\rho\sigma}$, risulta che per una teoria di campo con un mediatore a massa nulla -il fotone- $w_\mu = hP_\mu$. Quindi h è detta elicità della rappresentazione, e $s = |h|$ viene talvolta usata come definizione dello spin di una particella di massa nulla. Si può ricavare che tutto ciò è perfettamente consistente con la definizione da noi utilizzata, e dev'essere $h = \pm 1$. Infine osserviamo anche che dal punto di vista dell'operatore elicità, definito come $\Lambda |\mathbf{p}, h\rangle = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|} |\mathbf{p}, h\rangle = h |\mathbf{p}, h\rangle$, per il fotone sono possibili solo due stati di elicità indipendenti $|\mathbf{p}, h = s\rangle$ e $|\mathbf{p}, h = -s\rangle$ (lo spin delle particelle senza massa è determinato completamente dalla direzione della quantità di moto!) perchè la parità è conservata [16]

densità di momento angolare orbitale e di spin. Infatti dall'applicazione del teorema di Noether troviamo una corrente canonica di momento angolare [17] $M_{\text{can}}^{\mu\alpha\beta} = r^\alpha T_{\text{can}}^{\mu\beta} - r^\beta T_{\text{can}}^{\mu\alpha} + S^{\mu\alpha\beta}$, ove $T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \epsilon_0(g^{\nu\kappa} F^{\mu\lambda} \partial_\kappa A_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$ è legato al contributo orbitale e $S^{\mu\alpha\beta} = F^{\mu\alpha} A^\beta - F^{\mu\beta} A^\alpha$ è legato al contributo di spin. E' interessante notare che qui i contributi sono separati esplicitamente, e vale $\partial_\mu M_{\text{can}}^{\mu\alpha\beta} = 0$ e $\partial_\mu S^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$. Lo pseudovettore momento angolare orbitale del campo EM risulta quindi $\widetilde{M}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{\text{can}}^{0jk} = \epsilon_{ijk} E^j A^k + E_l \epsilon_{ijk} r_j \partial_k A_l$, per cui risulta la formula popolare [18]

$$\mathbf{g} = \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \underbrace{\epsilon_0 E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}}_{\mathbf{S}} \quad (16)$$

che ha il difetto di essere gauge dipendente. La controversia a riguardo è dovuta anche al fatto che la forma di \mathbf{S} e \mathbf{L} è tale per cui nell'approccio quantistico i loro operatori corrispondenti non soddisfano le usuali regole di commutazione [19]. Infatti di solito si adotta la gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ in un dato sistema di riferimento, e si considerano le definizioni alternative [15]¹¹

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}_\perp \quad (17)$$

$$\mathbf{L} = \epsilon_0 E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_{\perp,i} \quad (18)$$

Pur rompendo esplicitamente la covarianza di Lorentz, \mathbf{L} e \mathbf{S} risultano a tutti gli effetti quantità conservate per il campo EM nel vuoto e quindi hanno significato fisico per un ben determinato sistema di riferimento in cui si adotta la gauge. Dal punto di vista sperimentale, la misura operativa della densità di momento angolare orbitale o di spin con una sonda locale avviene in un particolare sistema di riferimento del laboratorio, ove la sonda è a riposo: è possibile comparare teoria ed esperimento in modo consistente¹².

Nel corso del tempo si è aperto un vasto dibattito sull'effettiva possibilità di separare in modo consistente i gradi di libertà orbitali e di spin del campo EM nel vuoto [15] [20]. Consideriamo la densità di SAM \mathbf{S} (quantità indipendente dall'origine degli assi associata all'ellitticità locale del fascio di luce polarizzato) e la densità di OAM $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{\text{can}}$ (quantità dipendente dall'origine degli assi) definiti secondo 16 con $\mathbf{P}_{\text{can}} = \epsilon_0 E_i \nabla A_i$. Negli esperimenti di ottica OAM e SAM sono considerati ben definiti e come gradi di libertà separati: piccole particelle sonda possono sperimentare un momento torcente locale proporzionale a \mathbf{S} e una forza di pressione proporzionale a \mathbf{P}_{can} , effetti misurabili in modo indipendente [21] [22] come si osserva in figura 2. Nel caso di ottica *parassiale* con fasci di luce monocromatici la separazione dei due contributi OAM e SAM dal punto di vista teorico risulta senza problemi, mentre nel caso generale con un campo EM sia per la CED che per la QED non risulta esserci una descrizione consistente e con significato fisico di \mathbf{L} e \mathbf{S} ,

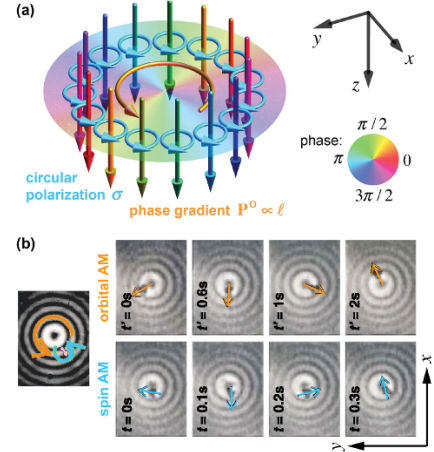


Figura 2: a) Rappresentazione intuitivo-geometrica di OAM e SAM associati ad un fascio ottico b) Effetti locali, dovuti a contributi separabili, di OAM e SAM sul moto di particelle microscopiche attorno ad una singolarità ottica ([15])

¹¹è stata utilizzata qui la classica decomposizione di Helmholtz di un campo vettoriale $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel$, ove $\nabla \cdot \mathbf{A}_\parallel = 0$ e $\nabla \times \mathbf{A}_\perp = 0$

¹²la maggior parte delle applicazioni in ottica inoltre utilizza onde EM monocromatiche, che dipendono esclusivamente dalla scelta del sistema di riferimento del laboratorio

ma solo di $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$. Infatti per quanto riguarda la trattazione quantistica con gli operatori di prima quantizzazione $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{S}}$, la trattazione è inconsistente con la condizione di trasversalità per i fotoni [9]; invece nel caso della teoria dei campi le correnti di Noether $S^{\mu\alpha\beta}$ e $L^{\mu\alpha\beta} = r^{\alpha}T^{\mu\beta} - r^{\beta}T^{\mu\alpha}$ non sono quantità conservate separatamente, ed inoltre queste correnti non possono essere rese simultaneamente gauge-invarianti e Lorentz covarianti [20]. Tuttavia, i valori di aspettazione locali degli operatori $\hat{\mathbf{L}}$ e $\hat{\mathbf{S}}$, così come per i pseudovettori $L_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L^{0jk}$ e $S_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S^{0jk}$ estratti dalle correnti di Noether nella gauge di Coulomb portano agli stessi valori \mathbf{S} e \mathbf{L} che appaiono negli esperimenti di ottica nel caso di fasci monocromatici. Inoltre per campi sufficientemente localizzati nello spazio $\int_V \mathbf{S} dV$ e $\int_V \mathbf{L} dV$ sono conservati - ossia indipendenti dal tempo - nel vuoto. Questo ha risvegliato la speranza di poter superare le difficoltà teoriche: in effetti il problema è stato recentemente risolto da Bliokh introducendo in entrambi i casi un termine di *spin-orbita*. L'approccio quantistico porta alla definizione dell'operatore $\hat{\Delta}$ e alle modifiche $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\Delta} = \hat{\mathbf{r}}' \times \hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} - \hat{\Delta} = \kappa \hat{\mathbf{h}}$, ove $\hat{\kappa} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{p}$, $\hat{\mathbf{h}} = \kappa \cdot \hat{\mathbf{S}}$ operatore di elicità e $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}} + \frac{(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}})}{p^2}$ è l'operatore di posizione di Pryce per i fotoni [23]¹³. Questo risolve il problema per il valore di aspettazione delle quantità *integrali* di OAM e SAM, non di quelle *locali*: in quest'ultimo caso è necessaria la correzione direttamente alle correnti di Noether $\widehat{S^{\mu\alpha\beta}} = S^{\mu\alpha\beta} - \Delta^{\mu\alpha\beta}$ e $\widehat{L^{\mu\alpha\beta}} = L^{\mu\alpha\beta} + \Delta^{\mu\alpha\beta}$, in modo che i tensori così modificati soddisfino una equazione di continuità e producano una descrizione locale di OAM e SAM con significato fisico proprio¹⁴. Come già accennato, per una misurazione operativa con una sonda locale ha significato solo il sistema di riferimento del laboratorio ove essa è a riposo: in tal senso $\widehat{S^{\mu\alpha\beta}}$ e $\widehat{L^{\mu\alpha\beta}}$ saranno gauge-invarianti ma non Lorentz covarianti. La modifica $\Delta^{\mu\alpha\beta}$ effettivamente ben riproduce le trasformazioni tra i contributi orbitale e di spin del momento angolare totale osservate sperimentalmente nell'ambito dell'ottica non parassiale.

2.3 Caratterizzazione e trasporto del momento angolare orbitale in fasci ottici, vortici ottici e carica topologica

Per studiare le soluzioni alle equazioni di Maxwell 1 *nel vuoto* (con $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$) legate alla propagazione di onde con *ben definito* momento angolare orbitale, introduciamo in modo del tutto generale il campo elettrico \mathcal{E} e magnetico \mathcal{B} in forma complessa per risolvere l'equazione delle onde associata [18]

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

Limitando la nostra attenzione a campi monocromatici con frequenza angolare costante ω , possiamo separare le variabili spaziali da quelle temporali nelle soluzioni dell'equazione delle onde: allora \mathbf{E} e \mathbf{B} sono campi dipendenti in modo armonico dal tempo¹⁵

$$\mathbf{E} = \Re(\mathcal{E}e^{-i\omega t}) \quad \mathbf{B} = \Re(\mathcal{B}e^{-i\omega t}) \quad (20)$$

¹³ \hat{p} è l'operatore scalare quantità di moto totale

¹⁴ In dettaglio, si richiede che valgano $\Delta^{0\alpha\beta} = 0$, $\Delta^{\mu\alpha\beta} = -\Delta^{\mu\beta\alpha}$ e $\partial_\mu \Delta^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$: da alcuni semplici calcoli ricordando la trasversalità del potenziale vettore e del campo EM nel vuoto si deduce che $\Delta^{0\alpha\beta} = \Delta^{\mu 0\beta}$, $\Delta^{k\alpha 0} = -\Delta^{k0\alpha} = -E^k A^\alpha$ e $\Delta^{kij} = -\epsilon^{ijl} B^k A^l$

¹⁵ \mathbf{E} del tutto equivalente ad applicare l'operatore trasformata di Fourier rispetto al tempo ad entrambi i membri dell'equazione. L'equazione delle onde può infatti essere completamente risolta utilizzando gli autostati in frequenza $u_\omega(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, ove la parte temporale della funzione d'onda è nella forma $e^{-i\omega t}$ (oscillazione con frequenza angolare costante ω) è separata dalla parte spaziale $u(\mathbf{r})$, soluzione dell'equazione agli autovalori per l'operatore laplaciano (proprio l'equazione di Helmholtz). La soluzione completa si può sempre scrivere utilizzando un'espansione in autostati $u(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega)u_\omega(\mathbf{r}, t) d\omega$ nel dominio della frequenza.

e sostituendo in 19 troviamo l'equazione di Helmholtz¹⁶

$$\nabla^2 \mathcal{F} + k^2 \mathcal{F} = 0 \quad (21)$$

ove $k = \frac{\omega}{c} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ è il numero d'onda, e $\mathcal{F} = \mathbf{E}$ o $\mathcal{F} = \mathbf{B}$. Soluzioni semplici dell'equazione di Helmholtz [24] sono le onde piane $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, che inserite in 21 danno $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Allora per $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ le soluzioni rappresentano onde piane $\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0 e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} e^{-i\omega t})$ che si propagano nella direzione \mathbf{k} con ampiezza costante \mathbf{E}_0 ; per $k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$ rappresentano onde evanescenti $\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0 e^{\pm i(k_x x + k_y y)} e^{-i\omega t}) e^{\mp |k_z| z}$ la cui ampiezza decade esponenzialmente lungo z . Ovviamente vi è una condizione di trasversalità $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ aggiuntiva su \mathbf{E}_0 data dalle equazioni di Maxwell. Per trovare la soluzione generale possiamo sommare su tutte le possibili onde piane e onde evanescenti: se abbiamo un insieme discreto M di frequenze angolari ω e di vettori d'onda \mathbf{k} allora $\mathbf{E}_m = \Re[\sum_m \mathbf{E}_0(m) e^{\pm i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - i\omega_m t}]$, ove $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m = \frac{\omega_m^2}{c^2}$ e $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{E}_0(m) = 0$ (caso tipico della presenza di condizioni al contorno al finito). In modo analogo nello spazio vuoto invece $\mathbf{E} = \Re[\int d^3\mathbf{k} d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}]$ con $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2}$ ed \mathbf{E}_0 densità di ampiezza complessa. Consideriamo ora il campo \mathbf{E} in un piano $z = \text{cost.}$ trasversale all'asse ottico z : possiamo valutare la trasformata di Fourier 2D del campo complesso $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in questo piano $\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx dy \mathbf{E}(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)}$. Nel piano trasversale allora, un campo monocromatico associato all'onda con dipendenza di tipo armonico dal tempo¹⁷ soddisfa all'equazione di Helmholtz 21. Sostituendo l'espressione data dall'antitrasformata di Fourier di $\mathbf{E}(x, y, z) = \int dk_x dk_y \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)}$ si trova la relazione notevole $\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{\pm i k_z z} = \hat{\mathbf{H}}(k_x, k_y; z) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0)$ ove $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ e $k = \frac{\omega}{c}$. Il segno \pm specifica che abbiamo due soluzioni che devono essere sovrapposte: il segno $+$ si riferisce ad un'onda che si propaga nel semispazio $z > 0$, viceversa $-$ denota un'onda che si propaga in $z < 0$. Lo spettro $\tilde{\mathbf{E}}$ di un campo associato ad un'onda nel piano $z = \text{cost.}$ (piano immagine) è quindi *unicamente* definito dallo spettro in un piano differente $z = 0$ (piano oggetto), tramite il propagatore nello spazio reciproco ("optical transfer function", OTF) $\hat{\mathbf{H}}(k_x, k_y; z)$. La *rappresentazione angolare spettrale* risulta quindi $\mathbf{E}(x, y, z) = \int dk_x dk_y \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)}$.

Possiamo ora studiare le soluzioni di questa equazione -i fasci di luce- nei regimi parassiale o non parassiale. In molti problemi di ottica (geometrica e ondulatoria) il campo EM si propaga in una certa direzione e si "diffonde" molto lentamente nella direzione trasversale (esempi classici sono la propagazione di impulsi laser o le guide d'onda). In questi casi i vettori d'onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ nella rappresentazione angolare spettrale sono quasi paralleli all'asse ottico - indicato con z convenzionalmente - e le componenti trasversali (k_y, k_z) sono piccole rispetto a $|\mathbf{k}|$. In particolare vale l'approssimazione parassiale

$$k_z = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \simeq k \left(1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k^2} \right) \quad (22)$$

che semplifica considerevolmente il calcolo degli integrali di Fourier. Per poter trattare l'approssimazione parassiale all'equazione di Helmholtz, è necessario però utilizzare il potenziale vettore \mathbf{A} (e il potenziale scalare ϕ associato) nella gauge di Lorenz (in forma esplicita $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$) in modo da avere una trattazione consistente¹⁸. Sostituendo

¹⁶Quest'ultima equazione può essere ricavata anche dalle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti, purchè il mezzo sia omogeneo, isotropo e lineare e privo di sorgenti [24]

¹⁷Nelle situazioni in cui il campo non ha questo tipo di dipendenza, basta sostituire al campo complesso \mathbf{E} lo spettro in frequenza $\hat{\mathbf{E}}$, perchè si può ottenere un campo dipendente dal tempo attraverso una trasformata di Fourier $\mathbf{E} = \Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega\right]$

¹⁸il motivo verrà esplicitato nel seguito

nelle equazioni di Maxwell 1 con la gauge adottata si trova che \mathbf{A} soddisfa all'equazione delle onde 19 [2]. Quindi ponendo $\mathbf{A} = \Re(\mathcal{A}e^{-i\omega t})$ ritroviamo ovviamente l'equazione di Helmholtz anche per il potenziale vettore \mathcal{F} ($\mathcal{F} = \mathbf{A}$). A questo punto consideriamo il caso in cui i campi vettoriali hanno una polarizzazione trasversa rispetto alla direzione dell'asse ottico z , scegliamo un vettore di polarizzazione costante di modulo unitario $\hat{\mathbf{t}}$ in modo che $\mathcal{F} = \hat{\mathbf{t}}\xi(\mathbf{r})$ e che l'equazione di Helmholtz diventi $\nabla^2\xi + k^2\xi = 0$. Seguendo l'approssimazione parassiale 22 consideriamo un fascio collimato per il quale $\xi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikz}$, ove $u(\mathbf{r})$ è la distribuzione in ampiezza: il profilo può cambiare per effetti di diffrazione o propagazione lungo l'asse z , ma le variazioni sono molto piccole rispetto al fattore predominante e^{ikz} (del tipo "onda piana"). Sostituendo nell'equazione di Helmholtz troviamo [18] $\nabla_t^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Possiamo inoltre trascurare $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ rispetto agli altri due termini, se la variazione trasversale del profilo è dominante rispetto a quella longitudinale $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \ll |\nabla_t^2 u|$ e se il profilo varia molto lentamente con z $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \ll \left|k\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ ¹⁹. Risulta quindi l'equazione parassiale per le onde

$$\nabla_t^2 u + 2ik\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

Sono state identificate nel corso del tempo varie soluzioni in forma chiusa di questa equazione, tra cui i modi Hermite-Gaussian, Laguerre-Gaussian, Bessel, Hypergeometric Gaussian, Ince-Gaussian, Mathieu, Hermite-Laguerre-Gaussian, Helmholtz-Gauss, Laplace-Gauss, cartesian e altri ancora [25]. In particolare nell'ambito di trasporto di OAM risultano interessanti soprattutto i primi 6 della lista [26].

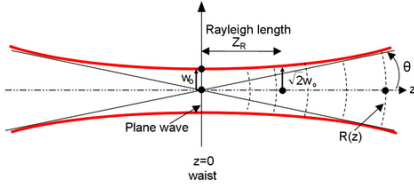


Figura 3: Caratterizzazione fisica tipica di un fascio ottico nel modo Hermite-Gaussian ([27])

I modi Hermite-Gaussian sono comunemente impiegati in sistemi con simmetria rettangolare, soprattutto nel caso di laser: separando le variabili cartesiane trasversali x, y da quella longitudinale z in modo che $u_{n_x n_y}^{\text{HG}}(x, y, z) = u_{n_x}^{\text{HG}}(x, z)u_{n_y}^{\text{HG}}(y, z)$, ove n_x e n_y sono gli ordini del polinomio di Hermite associato ($n_x, n_y \in \mathbb{N}$), si può risolvere l'equazione delle onde parassiale per ognuna delle due coordinate trasversali $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{n_x}^{\text{HG}}(x, z) = 0$ e $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{n_y}^{\text{HG}}(y, z) = 0$. Il risultato è [18] $u_{n_x n_y}^{\text{HG}}(x, y, z) = u_{n_x}^{\text{HG}}(x, z)u_{n_y}^{\text{HG}}(y, z)$, ove

$$u_{n_x}^{\text{HG}}(x, z) = \frac{C_{n_x}^{\text{HG}}}{w(z)} \exp\left[ik\frac{x^2 z}{2(z_R^2 + z^2)}\right] \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[-i\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\chi(z)\right] H_{n_x}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \quad (24)$$

e $u_{n_y}^{\text{HG}}(y, z)$ ha una forma del tutto analoga. In questa espressione H_{n_x} è il polinomio di Hermite di ordine n_x , $C_{n_x}^{\text{HG}}$ è una costante di normalizzazione, $w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right]$ è il raggio del fascio²⁰, $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ è il range di Rayleigh e infine il termine $\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\chi(z)$ con $\chi(z) = \arctan\frac{z}{z_R}$ è la fase di Gouy che descrive il salto di fase complessivo di π che occorre nella regione focale di un'onda sferica convergente²¹ (figura 3). I modi Hermite-Gaussian non trasportano OAM, ma formano una base completa di soluzioni

¹⁹è qui che il fatto che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ esclude una possibile approssimazione parassiale consistente per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B}

²⁰distanza alla quale il termine gaussiano diminuisce di un fattore $\frac{1}{e}$; w_0 è quindi il raggio del fascio a $z = 0$

²¹tecnicamente un fascio di tipo gaussiano subisce una variazione della fase rispetto ad un'onda piana che si propaga con la stessa frequenza: i fronti d'onda si propagano più velocemente, portando ad un'effettiva

e sono molto facili da ottenere sperimentalmente: quindi possono essere trasformati in un'altra base completa, quella formata dai modi Laguerre-Gaussian. Questi ultimi intervengono in sistemi con simmetrie di tipo rotazionale: utilizzando le coordinate cilindriche $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right) u_{mp}^{\text{LG}}(\rho, \phi, z) = 0$ si trova in forma normalizzata ($p \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$)

$$u_{mp}^{\text{LG}} = \frac{C_{mp}^{\text{LG}}}{\sqrt{w(z)}} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|m|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) L_p^{|m|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right) \quad (25)$$

$$\times \exp\left[-ik\frac{\rho^2 z}{2(z_R^2 + z^2)}\right] \exp(im\phi) \exp[-i(2p + |m| + 1)\chi(z)] \quad (26)$$

ove $L_p^{|m|}$ è il polinomio di Laguerre generalizzato, C_{mp}^{LG} è una costante di normalizzazione e il significato degli altri simboli è analogo a quello indicato nel caso dei modi Hermite-Gaussian.

I modi Laguerre-Gaussian sono ortonormali sia nell'indice di modo p quando integrati sulla coordinata radiale ρ , sia nell'indice di modo azimutale m quando integrati sulla coordinata azimutale ϕ che in entrambi gli indici $\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho d\rho d\phi u_{mp}^{\text{LG}}(\rho, \phi, z) [u_{mq}^{\text{LG}}(\rho, \phi, z)]^* = \delta_{nm} \delta_{pq}$. Solo i modi con $m = 0$ hanno una distribuzione in intensità con un valore non nullo sull'asse del fascio, e il numero di nodi nella direzione radiale risulta $p + 1$ come si osserva in figura 4. Il termine azimutale di fase $e^{im\phi}$ è cruciale [29]: esso causa l'avvolgimento dei fronti d'onda in una struttura di tipo elicoidale, riportata in figura 5, con singolo passo $\frac{\lambda}{|m|}$ e senso di avvolgimento dato dal segno di m ($+$ \Leftrightarrow verso di avvolgimento orario, e viceversa). Evidentemente m è legato ad un tipo di singolarità nel profilo di fase dell'onda: si tratta di un *vortice ottico*. La classificazione generale delle singolarità di fase²² nei fronti d'onda di un'onda monocromatica, legata alla nomenclatura nell'ambito cristallografico, è la seguente [30]

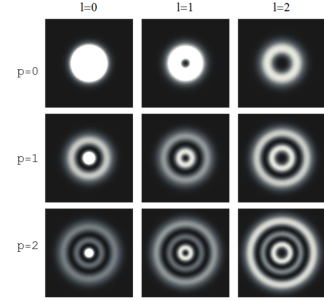


Figura 4: Profili di intensità del campo associato ad un modo Laguerre-Gaussian con indici (l, p) , ove l è identificato con m ([27])

- (a) *infinitely extended edge dislocations*: Ognuno dei fronti d'onda che si propaga lungo l'asse z è tagliato lungo una linea di dislocazione, e il fronte d'onda superiore è traslato di $\frac{\lambda}{2}$ rispetto a quello inferiore, con una differenza di fase di π .
- (b) *screw dislocations* o *vortici ottici*: sono difetti puntuali nel fronte d'onda, a cui è associata una cosiddetta [18] *carica topologica* (ordine della singolarità) $m := \frac{1}{2\pi} \oint d\Phi = \frac{1}{2\pi} \oint ds \cdot \nabla\Phi$, ove Φ è la fase associata all'onda e ds l'elemento di linea. Un fronte d'onda ha la forma di una o più superfici elicoidali intrecciate, a seconda del valore esplicito di $|m|$.
- (c) *limited edge dislocations*: è un ibrido dei due tipi precedenti, ove la linea di taglio della superficie del fronte d'onda ha un'estensione limitata da un lato (punto di origine): la differenza di fase dai due lati del mezzo taglio è di π , ma varia in modo continuo attorno al punto di origine.

velocità di fase locale maggiore. Fisicamente è stato solo recentemente attribuito al comportamento asintotico del campo associato all'onda nella regione focale quando $k \rightarrow +\infty$ (limite dell'ottica geometrica rispetto a quella ondulatoria), utilizzando il principio della fase stazionaria [28]

²²In questi punti l'ampiezza del campo associato all'onda \mathcal{F} è zero, così come la parte immaginaria e reale del campo complesso: la fase non è ben definita e risulta indeterminata

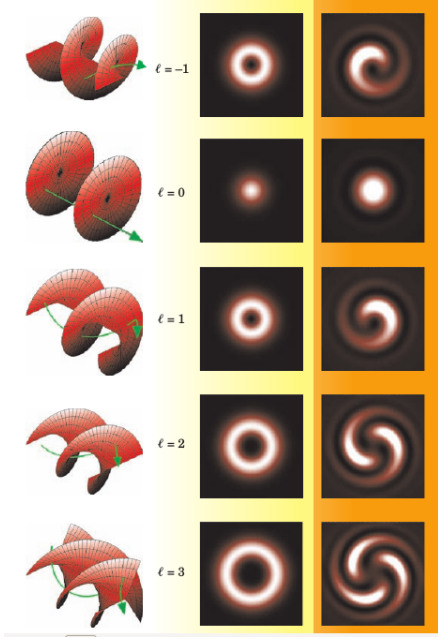


Figura 5: Per diversi valori del parametro m (qui identificato con l) di un fascio in un modo LG: a sinistra rappresentazione istantanea del fronte d'onda di tipo elicoidale, al centro e a destra profili di intensità del modo LG (di tipo anulari) e dell'interferenza del modo LG con un'onda piana (a spirale) [31]

orbitale valido nell'approssimazione parassiale: utilizzando l'equazione 4 possiamo definire un tensore $\overleftrightarrow{\mathcal{M}} := \overleftrightarrow{T} \times \mathbf{r}$ di densità di flusso di momento angolare totale, con componenti $\mathcal{M}_{ik} = \epsilon_{ilk} r_l \omega - \epsilon_{ilm} r_l \left(\epsilon_0 E_m E_k + \frac{1}{\mu_0} B_m B_k \right)$. Esprimendo esplicitamente \mathbf{E} e \mathbf{B} in funzione dei loro campi complessi associati \mathcal{E} e \mathcal{B} e integrando su un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ si ottiene per un fascio parassiale con asse ottico z [18]

$$\mathcal{M}_{zz} = \frac{1}{2} \Re \left[y \left(\epsilon_0 \mathcal{E}_z \mathcal{E}_z^* + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_x^* \mathcal{B}_z \right) - x \left(\epsilon_0 \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_y^* \mathcal{B}_z \right) \right] \quad (29)$$

A questo punto si possono usare direttamente le equazioni di Maxwell 1 nel vuoto per esprimere le componenti z dei campi, supposte normalizzabili, in funzione delle componenti x e y trasversali²³, e visto che il flusso di momento angolare totale risulta $M_{zz} = \int dx dy \mathcal{M}_{zz}$ si ottiene allora separando i contributi orbitali e di spin

$$M_{zz}^{\text{spin}} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2\omega} \Re \left[-i \int \rho d\rho d\phi (\mathcal{E}_x \mathcal{B}_x^* + \mathcal{E}_y \mathcal{B}_y^*) \right] \quad (30)$$

$$M_{zz}^{\text{orbital}} = \frac{\epsilon_0 c^2}{4\omega} \Re \left[-i \int \rho d\rho d\phi \left(-\mathcal{B}_x^* \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \phi} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{B}_x^*}{\partial \phi} - \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{B}_y^*}{\partial \phi} + \mathcal{B}_y^* \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \phi} \right) \right] \quad (31)$$

ove 30 dipende esclusivamente dalla polarizzazione del fascio e 31 è legato alla variazione della variabile azimutale ϕ . Ora la componente del flusso di energia lungo l'asse ottico z , mediato sul periodo T e calcolato attraverso una sezione trasversale del fascio, risulta $S_z =$

²³ $\mathcal{E}_j = -i \frac{c^2}{\omega} \epsilon_{jkl} \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial r_k}$ e $\mathcal{B}_j = -i \frac{1}{\omega} \epsilon_{jkl} \frac{\partial \mathcal{E}_l}{\partial r_k}$

Osserviamo che il caso di singolarità di fase del tipo “vortice ottico” è di gran lunga il più frequente, per via della forte instabilità dovuta alle perturbazioni nel caso di esistenza di “edge dislocations”. Per quanto riguarda i modi Bessel, essi sono soluzioni sia dell'equazione delle onde parassiale che dell'equazione di Helmholtz, sono una base completa e hanno la peculiare caratteristica di avere un profilo trasversale invariante nella propagazione, seppur *infinitamente* esteso. Quindi pur non presentando problemi dal punto di vista dell'approssimazione parassiale, la realizzazione pratica di tali modi è limitata dalla dimensione finita dell'apertura. La distribuzione in ampiezza risulta, nel caso parassiale e non parassiale rispettivamente,

$$u_m^{\text{B}}(\rho, \phi, z) = J_m(\kappa\rho) \exp(im\phi) \exp(i(k_z - k)z) \quad k_z = k - \frac{\kappa^2}{2k} \quad (27)$$

$$\xi_m^{\text{B}}(\rho, \phi, z) = J_m(\kappa\rho) \exp(im\phi) \exp(ikz) \quad k_z = \sqrt{k^2 - \kappa^2} \quad (28)$$

ove J_m è la funzione di Bessel di prima specie e notiamo la presenza del fattore $e^{im\phi}$ che indica che i modi Bessel hanno OAM ben definito. Vediamo in dettaglio il calcolo effettivo del momento angolare

$\frac{1}{2\mu_0\omega}\Re[\int \rho d\rho d\phi(\mathcal{E}_x\mathcal{B}_y^* - \mathcal{E}_y\mathcal{B}_x^*)]$, allora si possono calcolare per un modo LG parassiale le quantità (già considerate nel paradosso di Beth) [29] [32]

$$\frac{M_{zz}^{\text{spin}}}{S_z} = \frac{\sigma_z}{\omega} \quad \frac{M_{zz}^{\text{orbital}}}{S_z} = \frac{m}{\omega} \quad \frac{M_{zz}}{S_z} = \frac{\sigma_z + m}{\omega} \quad (32)$$

ove $-1 \leq \sigma_z \leq 1$ è legato alla polarizzazione -in generale ellittica- del fascio e vale ± 1 per una polarizzazione di tipo circolare e 0 per quella di tipo lineare. Nel calcolo risulta *predominante* il contributo del fattore $e^{im\phi}$, che determina il fatto che un tipo di fascio trasporti o meno una quantità ben definita di OAM. Da un punto di vista semiclassico l'equazione 32 induce a pensare²⁴ che ad ogni fotone del fascio (di energia $\hbar\omega$) sia associato un ben definito momento angolare orbitale pari a $\hbar m$ e un momento angolare di spin pari a $\hbar\sigma_z$. Tutto questo risulta ben definito solo ed esclusivamente nell'approssimazione parassiale [33]. Come già discusso precedentemente, nel caso generale -equazione di Helmholtz completa- è necessario tenere conto che vi può essere un trasferimento tra OAM e SAM (detto "AM-conversion"), e che quindi non è più possibile associare $\hbar m$ al contributo orbitale e $\hbar\sigma_z$ al contributo di spin, seppure il momento angolare totale esibisca una dipendenza semplice da m e σ_z . In realtà, seppure il contributo di spin sia totalmente dipendente solo dalla polarizzazione del fascio, il contributo orbitale dipende oltre che dal fattore $e^{im\phi}$ anche dalla polarizzazione e dal tipo di fascio²⁵. Tenere conto di questi effetti permette di spiegare in modo semplice ed efficace il paradosso di Beth, l' "AM-conversion" e tanti altri effetti (tipo l'effetto "spin Hall") [33].

2.4 Stati OAM e premessa alla QKD

Il momento angolare della luce rappresenta un nuovo fondamentale *grado di libertà*, che recentemente ha acquisito un ruolo centrale nella teoria dell'informazione e della computazione quantistica. In generale, in QED vi sono infiniti modi di trovare una separazione gauge invariante del momento angolare totale di un fotone nei suoi contributi orbitale e di spin [20]: fondamentalmente la questione è legata al fatto che non esiste un sistema di riferimento in cui esso è a riposo [34]. In approssimazione parassiale, tuttavia, partendo dalle espressioni 17 per le due osservabili \mathbf{L} e \mathbf{S} nella gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ si può dimostrare che non solo ha significato fisico la decomposizione del momento angolare totale J_z (lungo la direzione di propagazione z) nelle sue due componenti L_z e S_z [32], ma che possiamo effettuare una procedura di quantizzazione dei campi diretta trovando un'espressione dello stato di fotone singolo $|\psi\rangle$ in funzione degli autostati di \hat{L}_z e \hat{S}_z [34]. In particolare partiamo dalla rappresentazione continua del potenziale vettore \mathbf{A} in una base di onde piane che soddisfa 19

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(16\pi^3\epsilon_0 c|\mathbf{k}|)^{\frac{1}{2}}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma}(\mathbf{k})\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-|\mathbf{k}|ct)} + c.c) \quad (33)$$

ove $\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})$ sono le ampiezze complesse corrispondenti ai due vettori di polarizzazione unitaria legati alla polarizzazione circolare $\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma}(\mathbf{k})$ ($\sigma = \pm 1$), soddisfacenti $\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma'}^*(\mathbf{k}) = \delta_{\sigma\sigma'}$ e $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma}(\mathbf{k}) = 0$. Con la quantizzazione dei campi, sostituendo formalmente alle ampiezze

²⁴guidato anche dall'analogia con l'azione dell'operatore $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$ in coordinate polari cilindriche sui suoi autostati del tipo $\Psi(\rho, \phi, z) = \psi(\rho, z)e^{im\phi}$: $\hat{L}_z\Psi(\rho, \phi, z) = (\hbar m)\Psi(\rho, \phi, z)$

²⁵Si può equivalentemente caratterizzare il fascio con due proprietà globali indipendenti: il cosiddetto vettore di Jonas generalizzato $\tilde{\alpha}$ (legato alla polarizzazione) e il vettore unitario \mathbf{I} (legato al vettore d'onda \mathbf{k}). In tal senso lavorando nello spazio reciproco con il campo associato all'onda si mostra che M_{zz}^{spin} dipende solo da $\tilde{\alpha}$, mentre M_{zz}^{orbital} dipende sia da $\tilde{\alpha}$ che da \mathbf{I}

complesse $\alpha_\sigma(\mathbf{k})$ gli operatori di creazione/annichilazione $\hat{\alpha}_\sigma(\mathbf{k})$, esprimendo i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} in funzione di \mathbf{A} e sostituendo in 33 17

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_\sigma \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(16\pi^3\epsilon_0 c|\mathbf{k}|)^{\frac{1}{2}}} (\boldsymbol{\epsilon}_\sigma(\mathbf{k})\hat{\alpha}_\sigma(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-|\mathbf{k}|ct)} + h.c.) \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3\mathbf{k} \left[\epsilon_{j,\sigma}^*(\mathbf{k})\hat{\alpha}_\sigma^\dagger(\mathbf{k})e^{ic|\mathbf{k}|t} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \epsilon_{j,\sigma'}(\mathbf{k})\hat{\alpha}_{\sigma'}(\mathbf{k}) - h.c. \right] \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hbar \sum_\sigma \int d^3\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \hat{\alpha}_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\hat{\alpha}_\sigma(\mathbf{k}) \quad (36)$$

ove $[\hat{\alpha}_\sigma(\mathbf{k}), \hat{\alpha}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, ma $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{\mathbf{L}}$ non sono veri momenti angolari nel senso della QM, non soddisfacendo alle usuali regole di commutazione tipiche dei generatori del gruppo $SU(2)$ ²⁶. Tuttavia è ancora possibile scegliere *due* componenti \hat{S}_i e \hat{L}_i che commutino tra loro in modo da costruire autostati simultanei di queste componenti: scegliamo \hat{S}_z e \hat{L}_z . A questo punto basta scegliere una base completa ortonormale di soluzioni dell'equazione delle onde parassiale 23, come i modi LG, ed espandere gli operatori di creazione/annichilazione $\hat{\alpha}_\sigma(\mathbf{k})$ del campo in funzione di quelli associati ai modi LG $\hat{\alpha}_{\sigma mp}(\mathbf{k})$: ne risulta alla fine, tralasciando alcuni dettagli [34], $|\psi\rangle = \sum_{\sigma mp} \int_0^{+\infty} dk_z C_{\sigma mp}(k_z) \hat{\alpha}_{\sigma mp}^\dagger(k_z) |0\rangle$, ove $|0\rangle$ è lo stato di vuoto e $C_{\sigma mp}(k_z)$ l'ampiezza di probabilità normalizzata²⁷ di trovare il fotone in un autostato $|\sigma m p k_z\rangle$ con polarizzazione circolare σ , vettore d'onda lungo z k_z e corrispondentemente ad un modo LG con indici m e p (e quindi con *ben definiti* SAM e OAM).

Nella teoria dell'informazione classica, il termine “bit” si può associare a due concetti correlati, ma ben distinti nella loro origine. Il *primo* concetto è l'*unità di informazione*: la quantità di informazione $H(A)$ per un insieme finito A è definita dal numero di bits necessari a codificare ogni elemento separatamente, ossia $H(A) = \log_2(|A|)$ ²⁸. La scelta del logaritmo è dettata dalla richiesta di soddisfare la proprietà $H(A \times B) = H(A) + H(B)$, la necessità della base 2 è dovuta dalla prevalenza in tecnologia dell'informazione di sistemi binari, con cifre 0 e 1, e dall'uso di sistemi fisici con due stati distinti per la codifica, che infatti rappresentano proprio il *secondo* concetto di bit “fisico” di valori 0 o 1. In questo senso n bit formano un registro $R = \{0, 1\}^n$, e lo stato del sistema può essere caratterizzato da 2^n possibili combinazioni dei bits nel registro R . I qubit rappresentano l'unità di informazione per un sistema quantistico e sono rappresentati con due stati ortogonali, indicati con $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (un registro di n qubit può essere indicato con $(\mathcal{C}^2)^{\otimes n}$, se $\mathcal{C}^2 = |0\rangle, |1\rangle$). La differenza sostanziale con il bit classico è che il qubit può essere preparato in *qualsiasi* sovrapposizione degli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Le proprietà dei sistemi quantistici come entanglement e la sovrapposizione, l'incapacità di clonare lo stato di un sistema quantistico (*no-cloning theorem* [35]), il fatto che una misura è un processo irreversibile e l'instabilità degli stati quantistici dovuti alle interazioni con l'ambiente hanno profondi effetti su come vengono scambiate le informazioni di tipo quantistico. Detto questo, dal punto di vista sperimentale, recenti progressi sono stati fatti nello studio di fotoni singoli o entangled²⁹ preparati in una

²⁶ $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = 0$, $[\hat{L}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k$ e $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}(\hat{L}_k - \hat{S}_k)$

²⁷ $\int_0^{+\infty} dk_z |C_{\sigma mp}(k_z)|^2 = 1$

²⁸La definizione moderna dell'entropia dell'informazione è dovuta a Shannon: se $\mathbf{A} = (A, p)$ è uno spazio di probabilità discreto, allora $H(A) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$. In realtà per un sistema quantistico con una matrice densità ρ il concetto di entropia viene generalizzato da Von Neumann: $H(\rho) = -tr[\rho \log_2(\rho)]$. A tutt'oggi si discute tuttavia dei problemi legati alla valutazione naturale dell'informazione contenuta in un sistema quantistico, e una delle proposte è un definizione di entropia *non additiva*, detta entropia di Tsallis.

²⁹Un sistema entangled è definito come un sistema il cui stato quantistico non è un elemento di un prodotto tensoriale di spazi di Hilbert relativi ai singoli costituenti locali (come ad esempio singole particelle).

sovrapposizione di stati OAM [36]. In questi casi, a differenza dei sistemi quantistici a due livelli -qubit- ove l'entanglement viene realizzato utilizzando i due stati di polarizzazione ortogonali dei fotoni ($\sigma = \pm 1$), gli stati OAM permettono di ottenere sistemi quantistici con d livelli ($d \geq 2$) -qudit- [37]. Questo approccio risulta essenziale in primis in crittografia quantistica [38] [39], ad esempio, per l'estensione dell' "alfabeto" di codifica quantistico senza dover incrementare il numero di fotoni entangled: infatti in tal caso viene ridotta la decoerenza³⁰ associata all'entanglement di un numero troppo elevato di fotoni [34].

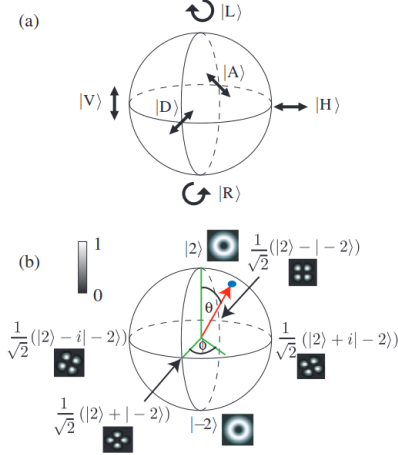


Figura 6: a) Sfera di Poincarè per il caso della polarizzazione dei fotoni b) Sfera di Poincarè per fasci parassiali del primo ordine ([34])

$|\theta, \phi\rangle_{p=0, m=1} = \cos(\frac{\theta}{2}) |p=0, m=1\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2}) |p=0, m=-1\rangle$ (es. $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ corrispondono ai modi HG di indici $(n_x, n_y) = (1, 0)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \pi$ ai modi HG di indici $(n_x, n_y) = (0, 1)$).

Per i modi di ordine più elevato, è stata introdotta una sfera di Poincarè ("Higher order Poincarè sphere", HOP) \mathcal{O}_{pm} con dimensione $2p + |m|$ estendendo il concetto di fase geometrica in ottica parassiale con trasformazioni continue dei modi: tramite gli operatori dell'algebra del gruppo di Lie SU(2) si possono mappare gli stati di spin coerenti in famiglie di modi spaziali che trasportano OAM e che appartengono alle HOP [34] [41] (figura 7). In particolare il continuo di stati di \mathcal{O}_{pm} viene generato con gli stati dei modi LG $|p, m\rangle = \hat{a}_{pm}^\dagger |0\rangle$ (fissati sui poli della sfera) tramite la trasformazione unitaria $|\theta, \phi\rangle_{pm} = \exp(-i\theta \hat{\mathcal{L}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\phi) |p, m\rangle = \hat{U}(\theta, \phi) |p, m\rangle$, ove $\hat{\mathcal{L}}$ è un vero operatore di momento angolare e $\hat{\mathbf{u}}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$. Tale rotazione dà luogo ad una sovrapposizione multidimensionale di stati del modo LG del tipo

$$|\theta, \phi\rangle_{pm} = \sum_{p'=0}^p \sum_{m'=-m}^m C_{p'm'}(\theta, \phi; p, m) |p', m'\rangle \quad (37)$$

³⁰fenomeno associato all'interazione inevitabile di ogni sistema quantistico con l'ambiente, che porta per un sistema coerente - ossia il cui stato è completamente rappresentabile con uno stato puro- ad un trasferimento di informazione con l'ambiente esterno. La dinamica del sistema, entangled con l'ambiente esterno, presa singolarmente è *non unitaria* e quindi "irreversibile": dopo un tempo τ caratteristico di decoerenza il sistema si troverà in una miscela statistica e il suo stato sarà rappresentato da una matrice densità

Per gli stati di polarizzazione, talvolta risulta conveniente pensare agli stati puri dei qubit come punti sulla superficie di una sfera di raggio unitario, detta sfera di Poincarè-Bloch: il polo nord e sud corrispondono agli stati $|0\rangle := |\sigma = +1\rangle$ e $|1\rangle := |\sigma = -1\rangle$ rispettivamente, e i punti alle estremità opposte di un diametro rappresentano in generale stati mutualmente ortogonali. Ogni stato di polarizzazione può essere descritto nella forma $|\theta, \phi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2}) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2}) |1\rangle$ che sulla sfera di Poincarè corrisponde ad un punto con coordinate angolari (θ, ϕ) . Una rappresentazione analoga è stata introdotta per rappresentare i modi associati a fasci parassiali del primo ordine [40], come in figura 6: in questo caso i poli della sfera nord e sud corrispondono ai modi LG con $(p, m) = (0, \pm 1)$, e in generale ogni stato legato ad un modo del 1 ordine viene rappresentato come

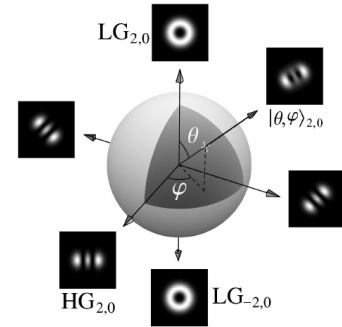


Figura 7: Sfera di Poincarè per fasci parassiali del secondo ordine ([34])

ove $2p' + |m'| = 2p + |m|$ e i coefficienti complessi $C_{p'm'}(\theta, \phi; p, m)$ dipendono dal punto (θ, ϕ) sulla sfera HOP³¹

I sistemi di comunicazione, nel loro aspetto più semplice, consistono di qualcuno che invia un messaggio (Bob), qualcuno che cerca di riceverlo (Alice)³² e una spia (Eve) che cerca di intercettare il messaggio. I canali di comunicazione possono essere di tipo classico e di tipo quantistico, a seconda del metodo di trasmissione delle informazioni: se è classico vuol dire che il metodo si basa sulle leggi della fisica classica, se è quantistico sugli effetti quantistici. Questo implica che un canale classico possa solo trasportare informazioni di tipo classico, mentre un canale quantistico possa trasportare sia informazioni di tipo classico che quantistico³³ [35].

Solitamente le implementazioni pratiche delle tecnologie di informazione quantistica richiedono procedure sperimentali molto avanzate; invece lo schema di crittografia quantistica, o *quantum key distribution* (QKD), è stato implementato efficacemente sia per i canali in fibra ottica che nello spazio libero in molti laboratori [39] e ha raggiunto un avanzato livello di sviluppo. Il primo protocollo di implementazione della QKD proposto da Bennett e Brassard [43] è il BB84: ne proponiamo ora una versione che utilizza la polarizzazione dei fotoni. L'implementazione fisica è analoga alla realizzazione di un qubit con una particella di spin $\frac{1}{2}$ in uno spazio di Hilbert 2-dimensionale, ove si utilizza $|1\rangle = |\uparrow\rangle$ e $|0\rangle = |\downarrow\rangle$ che sono autovettori dell'operatore di spin σ_z , $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ autovettori di σ_x e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$ autovettori di σ_y (3 basi *coniugate*). Per la polarizzazione del fotone una possibile combinazione di basi risulta "verticale"/"orizzontale" (H/V), "diagonale su"/"diagonale giù" (D/A) e polarizzazione circolare sinistra/destra (L/R), autovettori rispettivamente di σ_x , σ_y e σ_z . E' necessario in questo caso che ci sia un canale quantistico di comunicazione (ove mandare fotoni polarizzati), e uno classico (ove discutere la preparazione e gli eventi di misurazione). Assumiamo che Eve possa intercettare e leggere ogni messaggio mandato nel canale classico, che verrà quindi chiamato canale pubblico. Nel nostro protocollo Alice prepara una sequenza di singoli fotoni, scelti a caso con eguale probabilità in uno dei 4 possibili stati di polarizzazione $|0\rangle = |H\rangle$, $|1\rangle = |V\rangle$, $|0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |D\rangle$ e $|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |A\rangle$. Le coppie $\mathcal{B} = \{|H\rangle, |V\rangle\}$ e $\mathcal{B}' = \{|D\rangle, |A\rangle\}$ costituiscono due basi ortonormali per gli stati di polarizzazione.

Una semplice sequenza di 20 fotoni è indicata in figura 8. Alice prepara i fotoni nello stato scelto (sequenza di bit s_A) e li invia a Bob utilizzando il canale quantistico, il quale sceglie indipendentemente in modo casuale una delle due basi \mathcal{B} , \mathcal{B}' per effettuare la misura (sequenza di bit s_B). Bob usa il canale classico per dire ad Alice quale base lui ha usato ogni volta per misurare la polarizzazione di ogni fotone arrivato (nei sistemi reali l'efficienza di Bob è ≤ 1), e Alice può dire a Bob in quali occasioni ha usato la stessa base in cui lei lo ha preparato. Nell'esempio in figura, gli slot in questione sono 2, 4, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16 e 19. Quando le basi coincidono *idealmente* (a meno di intrusioni di Eve) Alice e Bob dovrebbero ottenere gli stessi risultati. Viene dunque preparata una sequenza di bit ("sifted

³¹da notare che si riottiene il caso precedente per $C_{0+1}(\theta, \phi; 0, 1) = \cos(\frac{\theta}{2})$, $C_{00}(\theta, \phi; 0, 1) = 0$ e $C_{0-1}(\theta, \phi; 0, 1) = e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2})$. Per concludere la distribuzione (θ, ϕ) degli stati sulla \mathcal{O}_{pm} è data dalla rappresentazione in funzioni di Wigner. Nello spazio delle fasi ottico, se $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ e $\mathbf{p}_\perp = (p_x, p_y)$ denotano la posizione e la quantità di moto trasversali (il vettore d'onda è normalizzato per questa discussione) e gli operatori hermitiani canonici associati sono $\hat{\mathbf{r}}_\perp$ e $\hat{\mathbf{p}}_\perp$ con $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\frac{\lambda}{2\pi}$ unici commutatori non nulli, allora $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}(\zeta)$ ove $\zeta = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$ e $[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\mathcal{L}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{L}}_k$

³²Storicamente vennero usati questi nomi nella prima presentazione dell'algoritmo di crittografia RSA del 1978 [42]

³³L'informazione di tipo classico si intende codificata in una proprietà del sistema che soddisfa le leggi della fisica classica, e viene trasformata con operazioni di tipo logico. L'informazione di tipo quantistico è codificata in alcune proprietà delle particelle a livello quantistico, obbedisce alle leggi della meccanica quantistica e viene trasportata tramite porte di tipo quantistico.

key”) per Alice (s'_A) e per Bob (s'_B) formata dai bit delle sequenze s_A e s_B rispettivamente per il quali le basi utilizzate concordano, che verrà poi utilizzata come chiave segreta. I bit rimanenti, ove la base di preparazione e di misurazione sono differenti, vengono scartati in quanto hanno il 50% di probabilità di non concordare. Naturalmente si deve assumere che Eve possa intercettare il messaggio, per cui Alice e Bob devono usare un flusso di bit condivisi assieme ad una discussione sul canale pubblico per discutere questa evenienza. Una spia può attaccare questo protocollo, ad esempio, misurando la polarizzazione di ogni fotone e poi preparando, sulla base del risultato della misura, un nuovo fotone da mandare a Bob. Dopo la discussione pubblica delle basi utilizzate, nel nostro esempio le sequenze di bit parzialmente correlate ottenute sono 0111010100 per Alice e 0011001100 per Bob.

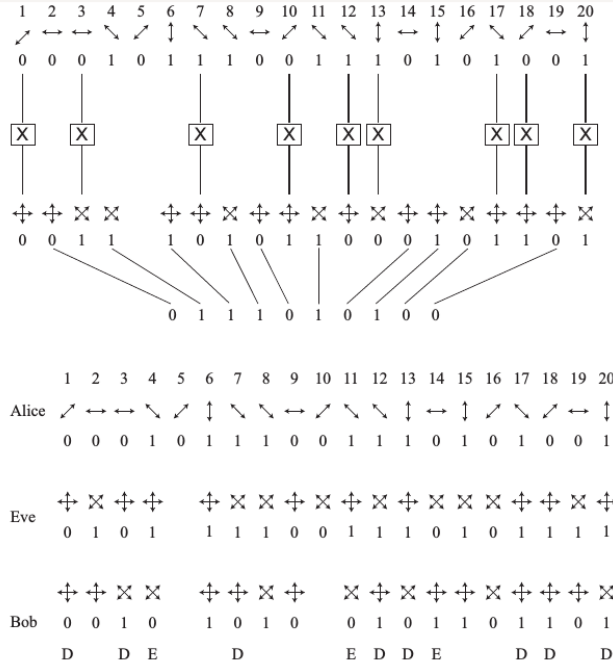


Figura 8: Schema semplificato QKD per il protocollo BB84 legato all'utilizzo della polarizzazione dei fotoni ([43])

ri, sempre considerando la possibile presenza di Eve: in pratica si compara una parte dei loro bit, poi ovviamente scartati, e si decide se il QBER è *minore del valore critico* per quel determinato sistema prima di procedere all'estrazione della chiave di sicurezza. I rimanenti errori possono essere rimossi formando set di bits e comparando la loro parità³⁴ sul canale pubblico: ogni controllo permette ad Eve di rubare “informazione”, e quindi uno dei bit del set dev'essere scartato. Con una sequenza adatta di controlli di parità, tutti gli errori possono essere rimossi con alta probabilità.

Spesso negli esperimenti con stati OAM [44] si producono fotoni in più basi complementari: una è formata dagli stati OAM stessi ($|\psi_l^{\text{OAM}}\rangle$, $l = -L, -L + 1, \dots, 0, \dots, L - 1, L$ e $\langle \psi_m^{\text{OAM}} | \psi_n^{\text{OAM}} \rangle = \delta_{mn} \forall m, n \in \{-L, -L + 1, \dots, 0, \dots, L - 1, L\}$), e una da stati del tipo $|\psi_n^{\text{ANG}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{l=-L}^L c_{nl} |\psi_l^{\text{OAM}}\rangle$ (normalizzati $\sum_{l=-L}^L |c_{nl}|^2 = d$), ove $d = 2L + 1$ è la dimensione dello spazio di Hilbert associato alla base OAM scelta e vale la notevole relazione $\langle \psi_n^{\text{ANG}} | \psi_l^{\text{OAM}} \rangle = \frac{1}{d}$ detta di reciproca “equità” tra le basi [45].

³⁴La parità \mathcal{P} di una stringa è determinata dal numero di bit che prendono il valore 1: se è pari $\mathcal{P} = 0$, se è dispari $\mathcal{P} = 1$. Sapendo la parità si eliminano metà delle possibili stringhe, per cui corrisponde ad 1 bit di informazione

3 La fibra ottica come moderno sistema di comunicazione

3.1 Sviluppo storico della fibra ottica fino ai giorni nostri

La comunicazione basata sulle onde elettromagnetiche rappresenta oggi la via più affidabile, economica e veloce di trasportare informazioni da un punto ad un altro. In ogni sistema di comunicazione l'informazione da trasmettere viene generata da una sorgente, viene trasmessa lungo un canale (come ad esempio l'atmosfera per una trasmissione radiofonica, le linee elettriche per la telefonia fissa, una rete wireless per la telefonia mobile oppure proprio una fibra ottica) attraverso il quale raggiunge un ricevitore, che è la destinazione. Molto spesso si utilizzano anche ripetitori e amplificatori lungo il canale di comunicazione per compensare l'attenuazione del segnale nella trasmissione. L'affidabilità di un sistema di comunicazione è strettamente legata al fatto che il canale di trasmissione debba introdurre la *minima distorsione* dell'informazione, affinché quest'ultima sia recuperata senza errori significativi. In generale per valutare l'efficienza di questi sistemi di comunicazione si utilizza il *bit-rate distance product* BL, ove B è la velocità di trasmissione dei dati (bit-rate) e L la spaziatura tra i ripetitori/amplificatori del segnale [46].

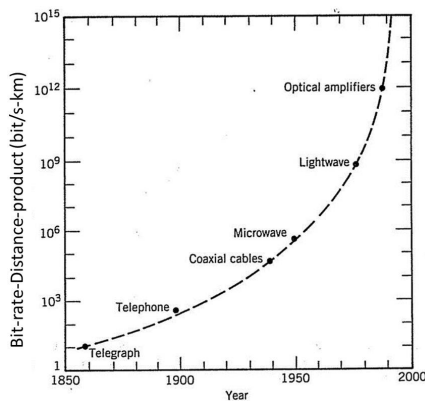


Figura 9: Evoluzione nella crescita del bit rate negli ultimi secoli ([46])

(1880), che è considerato il precursore della moderna comunicazione in fibra ottica [47]. Per aumentare il BL, nella seconda metà del XX secolo, si ricominciò quindi a pensare all'utilizzo delle onde luminose, che in modo naturale teoricamente possiedono una elevata capacità di trasmissione delle informazioni, soprattutto per alte frequenze dell'ordine del THz³⁵ (figura 9). Il problema maggiore era la disponibilità di una sorgente coerente di luce che potesse essere affidabile per il trasporto di informazioni: la rivoluzione arrivò nel 1960 con la costruzione del primo laser da parte di Maiman [47]. I primi esperimenti sul possibile uso dei raggi laser in atmosfera mostrarono che le onde luminose sono attenuate e distorte, per fenomeni di scattering e assorbimento: per un affidabile sistema di comunicazione basato sulla trasmissione di onde luminose a lunga distanza serve un mezzo di

³⁵La regione è legata strettamente alla nozione di *larghezza di banda* B, che tipicamente in questo settore [27] rappresenta il range di frequenze contenute all'interno di un segnale (o che un canale di comunicazione può elaborare per un dato segnale in ingresso). Teoricamente la frequenza massima di un segnale pone un limite alla larghezza di banda, e quindi alla velocità di trasmissione dei dati; usualmente comunque B è numericamente una *frazione* molto ridotta della frequenza dell'onda portante. Infatti in teoria dell'informazione il teorema di Shannon-Hartley [35] afferma che la *massima* velocità a cui possono essere trasmesse le informazioni (escludendo codici per le correzioni di errori, e considerando dati puri senza errori) su un canale di comunicazione, quantificata dalla capacità del canale C in bit/s, per una specificata larghezza di banda B (banda passante nel caso di un segnale modulato), per una potenza media del segnale S e un rumore medio di potenza N (entrambi in watt) è $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$ (che corrisponde ad un *canale discreto senza memoria*).

trasmissione che possa proteggere il fascio di luce che trasporta il segnale. E' qui che nasce l'idea di utilizzare le fibre ottiche(1966) come moderno *sistema di comunicazione*: il principio fisico (usare il fenomeno della riflessione totale per la propagazione del segnale luminoso) era stato già scoperto da oltre un secolo (Daniel Colladon e Jacques Babinet, 1840), ma il suo utilizzo era legato perlopiù all'illuminazione interna o alla trasmissione di immagini a breve distanza. Era stato teorizzato che fibre ottiche basate sul vetro a base di silice³⁶ potessero essere il mezzo di trasmissione adatto, purchè metalli e altre impurità potessero essere rimosse dal vetro, visto che un problema importante era rappresentato dalle elevate perdite in potenza del segnale nella comunicazione³⁷ ($\gamma \simeq 1000\text{dB km}^{-1}$): l'evoluzione della tecnologia in merito portò subito a ridurre l'attenuazione di oltre un fattore 500 ($\gamma \leq 20\text{dB km}^{-1}$). La scoperta dei laser a semiconduttore GaAs che lavorano a temperatura ambiente(1970) permise quindi di avere a disposizione una sorgente luminosa compatta e coerente; unita alla bassa perdita in potenza delle nuove fibre portò ad uno sviluppo mondiale dei sistemi di comunicazione basati su fibra ottica. Dal 1975 al 2000 lo sviluppo di nuove tecnologie ha portato praticamente al raddoppiamento del prodotto BL ogni anno [46]: le caratteristiche essenziali di trasmissione delle fibre che hanno avuto un ruolo in questo sviluppo sono l'attenuazione γ e la larghezza di banda B .

L'ottimizzazione estrema di queste caratteristiche congiunte è stata la chiave del successo, e ha interessato in modo diretto soprattutto la fisica dello stato solido e l'elettronica (es. realizzazione di laser a semiconduttore operanti nella banda di frequenze ottimale, sviluppo di amplificatori ottici efficienti per l'amplificazione diretta del segnale luminoso lungo la fibra, sviluppo di fibre progettate ad hoc per risolvere problemi i problemi di dispersione come *dispersion-shifted fiber*,...). Attualmente nei sistemi di comunicazione basati sulla fibra ottica si raggiungono per le standard single-mode single-core fiber (SM-SCF) capacità di trasmissione dati fino a 100 TB s^{-1} ; mentre introducendo le multi-core fiber (MMF) la capacità di trasmissione può essere incrementata e attualmente il limite risulta 1 PB s^{-1} [49]. Per ciò che riguarda il bit rate product, nelle trasmissioni a lunga distanza per le SM-SCF il limite attuale risulta $534 \text{ PB} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km}$ (52.2 TB s^{-1} trasmessi su 10230 km); mentre con le MMF si è addirittura raggiunto il valore $1.03 \text{ PB} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km}$ (688 TB s^{-1} trasmessi per ognuno dei

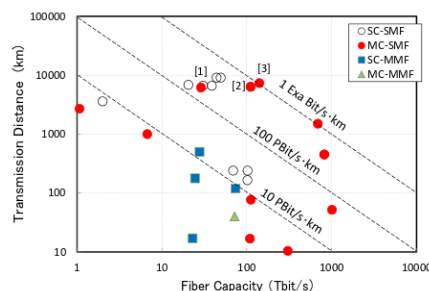


Figura 10: Questa è la situazione del bit-rate distance product nel 2014 ([48])

³⁶Perchè proprio il vetro? Il vetro è un materiale notevole che è stato utilizzato in forma “pura” da almeno 9000 anni; la cui composizione rimane relativamente immutata per millenni e il cui uso è molto diffuso. Alcune proprietà importanti del vetro sono: [47]

- Il vetro liquido, all'abbassamento della temperatura, non solidifica ma subisce una transizione dinamica di tipo vetroso, che non ne cambia la struttura ma soltanto la viscosità, in un modo che può essere controllato: gradualmente esso diventa sempre più teso, esibendo proprietà meccaniche tipiche dei solidi (solid-like) anzichè dei liquidi (liquid-like), fino eventualmente a diventare rigido, senza però cambiare la sua struttura materiale.
- Il vetro siliceo altamente puro è caratterizzato da attenuazioni del segnale estrapolatamente ridotte, fino a $\gamma \simeq 0.2 \text{ dB km}^{-1}$
- I carichi di rottura (compressione, trazione e flessione) del vetro sono molto elevati; per cui il vetro è un materiale molto resistente: nel caso delle fibre ottiche il vetro non è esposto all'atmosfera esterna (che porta alla formazione di crepe e quindi di fratture sulla superficie), ma viene fuso in un ambiente pulito e ricoperto di polimeri che non permettono il contatto con l'atmosfera

³⁷La definizione dell'attenuazione per un segnale luminoso γ per unità di lunghezza L risulta $\gamma L = 10 \log_{10} \left(\frac{P_i}{P_o} \right)$, ove P_i è la potenza del segnale in ingresso e P_o quella del segnale in uscita

12 core su 1500 km) [46] [48](figura 10)³⁸. Inoltre è da segnalare anche la presenza di una rete di comunicazione sottomarina diffusa in tutto il globo basata sull'utilizzo di fibre ottiche [46].

3.2 Struttura del canale di comunicazione basato sulla fibra ottica

In generale nei sistemi di comunicazione i segnali prodotti dalle sorgenti contenenti l'informazione non vengono trasmessi direttamente, ma vengono utilizzati per *modulare* un altro segnale -tipicamente onde elettromagnetiche con forma periodica- che può essere fisicamente trasmesso, detto *onda portante* (carrier signal). Per un dato tipo di segnale, la modulazione dell'onda portante può essere rispettivamente di tipo analogico o digitale. Nella modulazione analogica solitamente l'ampiezza (amplitude modulation, AM), la fase (phase modulation, PM) o la frequenza dell'onda (frequency modulation, FM) portante viene modificata in accordo con l'ampiezza del segnale iniziale; nella modulazione digitale il segnale analogico viene prima convertito in un segnale digitale consistente dal punto di vista logico di una serie di 0 e 1, che viene utilizzato per modulare la portante.³⁹ Inoltre per uno stesso mezzo di trasmissione -inteso come supporto fisico del trasporto di informazione- risulta conveniente e spesso indispensabile combinare i segnali analogici multipli o i flussi di dati digitali in un unico segnale nel collegamento fisico condiviso. La tecnica, detta *multiplexing*, permette di dividere la capacità⁴⁰ di un canale di comunicazione di alto livello in più sottocanali di basso livello, uno per ogni segnale analogico o dato digitale da trasferire. Il dispositivo che realizza il multiplexing di un segnale è detto multiplexer (MUX); quello che realizza il processo inverso è detto invece demultiplexer (DEMUX o DMX)⁴¹. Principalmente si può catalogare il multiplexing in deterministico (commutazione di circuito) o statistico (commutazione di pacchetto), a seconda che il canale di comunicazione sia appunto condiviso tra più nodi in modo deterministico o non deterministico: nel nostro caso il multiplexing è di tipo deterministico, perchè sorgente e ricevitore stabiliscono un canale di comunicazione fissato, che utilizza l'intera larghezza di banda associata al canale e che rimane collegato per tutta la durata della comunicazione⁴². Il multiplexing di tipo deterministico (larghezza di banda costante) può essere effettuato in vari modi [47] [27]:

- *Spatial-division multiplexing* (SDM): si tratta della separazione fisica dei mezzi di trasmissione del segnale.
- *Time-division multiplexing* (TDM): Nel caso sincrono ad ogni sottocanale è associato periodicamente in modo ciclico uno slot temporale di lunghezza fissa, in modo statico, e il blocco di dati relativo al sottocanale viene trasmesso soltanto durante quello

³⁸La spiegazione dettagliata della struttura geometrica di una fibra ottica sarà spiegata nella prossima sezione; in ogni caso le fibre ottiche si dicono *single-core* se esiste un solo core, *multicore* se ne esistono più di uno, *single-mode* se supportano un solo modo di propagazione e *multimode* se ne supportano più di uno

³⁹In genere le 3 tecniche di modulazione digitale del segnale utilizzate sono le corrispondenti del caso analogico: Amplitude-shift keying (ASK), Phase-shift keying (PSK) e Frequency-shift keying (FSK).

⁴⁰Dal punto di vista della teoria dell'informazione, siano X e Y sono le variabili casuali che rappresentano l'input e l'output (ossia l' "alfabeto del codice", con simboli x e y) con una densità di probabilità rispettivamente $p_X(x)$ e $p_Y(y)$. Se $p_{Y|X}(y|x)$ è la funzione di distribuzione di probabilità condizionata di Y dato X, allora essa dipende soltanto dal canale di comunicazione. Quindi la densità di probabilità congiunta $p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X}(y|x)p_X(x)$ può essere utilizzata per ricavare l'informazione mutua $I(X;Y) = \sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) \log \left(\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)} \right)$ e la capacità del canale viene definita da $C = \max_{p_X(x)} I(X;Y)$

⁴¹allo stesso modo il modulatore (modulator) è il dispositivo che effettua la modulazione di un segnale, e il demodulatore (demodulator) effettua la demodulazione. In tal caso esiste anche un dispositivo che può compiere entrambe le operazioni, detto modem.

⁴²al contrario nel multiplexing di tipo statistico i dati sono trasmessi in piccole unità, dette pacchetti, che viaggiano tra un nodo e un altro di una rete di comunicazione in modo *indipendente* tra loro

slot temporale. Dopo l'ultimo sottocanale di ogni ciclo vengono inseriti un canale di sincronizzazione e talvolta un canale di correzione errori: il complesso costituisce un *frame*, che si ripete periodicamente nel tempo. Nel caso statistico le assegnazioni del time slot sono solo su richiesta diretta, ossia dinamiche, e nel singolo frame vi è anche un sottocanale con l'indirizzo associato.

- *Frequency-division multiplexing* (FDM): tecnica per la quale l'intera larghezza di banda disponibile nel mezzo di comunicazione è divisa una serie di sottobande di frequenza non sovrapposte tra loro⁴³, ciascuna delle quali è utilizzata per portare un segnale separato. Il risultato della modulazione della portante di frequenza f_1 con un segnale in banda base (baseband) di frequenza f_2 è di generare sottofrequenze alla somma ($f_1 + f_2$) e alla differenza ($f_1 - f_2$) delle due frequenze: l'informazione viene trasportata, nel segnale modulato, in queste bande laterali attorno alla frequenza della portante, in una ristretta banda di frequenze⁴⁴. Esempi tipici sono il broadcasting per la televisione e per la radio, le comunicazioni via satellite, i modem DSL a banda larga e nelle reti telefoniche per chiamate multiple. Lo stesso tipo di tecnica applicato alle comunicazioni in fibra ottica viene chiamato *wavelength division multiplexing* (WDW), per via dell'utilizzo di segnali luminosi anzichè elettrici.
- *Code-division multiplexing* (CDM): è una tecnica dove più canali condividono simultaneamente lo stesso spettro in frequenza, e questa larghezza spettrale risulta più grande del bit rate (o symbol rate nel caso generale) del sistema. Principalmente si utilizza come metodo il *frequency-hopping spread spectrum* (variazione a intervalli di tempo regolari della frequenza di trasmissione in modo pseudocasuale attraverso un codice prestabilito) e il *direct sequence spread spectrum* (ogni canale trasmette i suoi bit come una sequenza codificata di impulsi -chips- specifica per il canale). Un esempio importante è il GPS.
- *Polarization-division multiplexing* (PDM): viene sfruttata la polarizzazione delle onde EM per distinguere segnali ortogonali e per ampliare quindi la capacità di trasporto di informazioni in fibra ottica; viene generalmente utilizzato in concomitanza con altri schemi di multiplexing tipo WDW. Le variazioni dello stato di polarizzazione lungo la fibra nel tempo dovute a effetti di dispersione o attenuazione del segnale possono portare a vari problemi nei sistemi PDM.
- *OAM multiplexing* : viene utilizzato il momento angolare associato ad alcune onde EM per distinguere i differenti segnali nel canale di comunicazione: spesso come nel caso del PDM viene utilizzato con altri tipi di schemi di multiplexing tipo WDW.

Per un sistema di comunicazione basato su fibra ottica risulta necessario utilizzare un trasmettitore (optical transmitter) e un ricevitore ottico (optical receiver) per la conversione tra segnale elettrico e segnale luminoso in input e in output dal canale di comunicazione vero e proprio (la fibra ottica). Spesso inoltre, soprattutto nel caso di sistemi di comunicazione per lunghe distanze, l'attenuazione del segnale lungo la fibra ottica richiede la presenza di ripetitori optoelettronici o di amplificatori ottici per la rigenerazione del segnale [46].

Il trasmettitore in generale consiste di una *sorgente ottica*, un *modulatore* e un *dispositivo per l'accoppiamento fibra-sorgente*. Come sorgente ottica si sceglie quasi sempre un laser a semiconduttore o un LED (light-emitting diode) [50] [46] (figura 11): nell'ambito delle comunicazioni in fibra ottica, i trasmettitori a semiconduttore devono essere compatti,

⁴³tali sottobande possono essere utilizzate in modo indipendente per portare differenti flussi di informazione, o in modo dipendente per un flusso di dati parallelo

⁴⁴in genere la frequenza della portante è estremamente più elevata rispetto a quella del segnale originario

altamente efficienti, affidabili, progettati per lavorare nell'intervallo di lunghezze d'onda ottimale e con la possibilità di essere modulati direttamente ad altissima frequenza. Una delle differenze sostanziali tra i due è legata al fatto che i laser producono luce coerente tramite emissione stimolata, mentre i LED luce incoerente tramite processi di emissione spontanea (elettroluminescenza): l'utilizzo dei laser è quindi indispensabile per aumentare al massimo l'efficienza del sistema di comunicazione in fibra ottica, soprattutto per le fibre single-mode⁴⁵. La larghezza spettrale in frequenza $\Delta\nu$ del segnale prodotto dal LED risulta infatti molto elevata ($\Delta\nu \sim 10\text{THz}$ per $T = 300\text{K}$) rispetto ai laser a semiconduttore (in genere $\Delta\nu \sim 1 - 10\text{MHz}$ per una livello di potenza tipica $P \sim 10\text{mW}$): questi ultimi possono quindi lavorare con alti bit rate ($\sim 10\text{GB s}^{-1}$), a differenza dei LED ($\sim 10 - 100\text{MB s}^{-1}$). L'efficienza di accoppiamento per i LED alle fibre ottiche single-mode è inoltre estremamente basso rispetto ai laser a semiconduttore, per cui i LED sono più indicati per le fibre multimode (sono infatti generalmente utilizzati per le LAN, local area network).

Wavelength	LEDs			Lasers			
	Class	800-850	1300	Class	800-850	1300	1500
Material		GaAlAs	InGaAsP		GaAlAs	InGaAsP	InGaAsP
Spectrum width (nm)		30-60	50-150	MM	1-2	2-5	2-10
Line width SM (MHz)				SM FP DFB		150 10-30	150 10-30
Output power (mW)		0.5-4.0	0.4-0.6	BH	2-8	1.5-8	1.5-8
Drive current (mA)		50-150	100-150	BH	10-40	25-130	
Rise time (ns)	Surface	4-14					
	Edge	2-10	2.5-10	BH	0.3-1	0.3-0.7	0.3-0.7
Modulation frequency (GHz)		0.08-0.15	0.1-0.3	BH	2-3	2-3	2-3
Beam width (half)							
Parallel	Surface	120-180°					
Perpendicular	Surface	120-180°					
Parallel	Edge	180°		BH	10-25°	10-30°	10-30°
Perpendicular	Edge	30-70°		BH	20-35°	30-40°	30-40°
Lifetime (million hours)		1-10	50-1000		1-10	0.5-50	0.5-50

Figura 11: Parametri caratteristici standard di LED e laser ([50])

laser, dovuti soprattutto all'emissione spontanea e ad effetti di ricombinazione elettrone-lacuna (rumore shot), ma il loro contributo può essere molto ben stimato e controllato tramite parametri come il signal-to-noise ratio (SNR), definito nel nostro caso⁴⁶ da $\text{SNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{max}}{A_N} \right)$ [46], ove A_{max} è l'ampiezza massima del segnale analogico e A_N l'ampiezza quadratica media del rumore. Il segnale ottico viene generato modulando l'onda portante, a volte *direttamente* utilizzando la corrente di iniezione del laser modulata in intensità, ma più spesso -soprattutto se si cerca l'efficienza- con un modulatore esterno⁴⁷ che viene posizionato all'uscita del laser per convertire il segnale continuo (continuous wave, CW) in uscita in un treno di impulso codificato con il corretto formato di modulazione⁴⁸.

⁴⁵In entrambi i casi il meccanismo di base responsabile per l'emissione luminosa di un semiconduttore è la ricombinazione di elettroni e lacune in una giunzione p-n quando una corrente passa nel diodo. Nel caso dell'emissione spontanea la direzione e la fase associata al fotone emesso è casuale; mentre nel caso dell'emissione stimolata il fotone emesso ha la stessa direzione e fase di quello incidente che causa la transizione (il campo EM esterno con la frequenza associata ad una determinata transizione elettronica incrementa una *singola* probabilità di transizione tra i due stati stazionari dell'atomo) [47]

⁴⁶in generale $\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right)$

⁴⁷di solito si tratta di un modulatore ad elettroassorbimento che sfrutta ad esempio l'effetto Franz-Keldysh, o un modulatore elettro-ottico come l'interferometro di Mach-Zender (MZ)

⁴⁸in questo modo si elimina il fenomeno del *chirp*: si tratta di una variazione *nel tempo* della fase (e quindi della frequenza) del segnale in uscita dal laser dovuto alla modulazione diretta in ampiezza nei laser a semiconduttore, che causa un aumento della lunghezza spettrale

Per quanto riguarda il dispositivo per l'accoppiamento fibra-sorgente, sostanzialmente si utilizzano due metodi: il butt coupling, che consiste nel portare direttamente la sorgente il più vicino possibile alla fibra ottica; e il lens coupling, ove si utilizza una lente tra sorgente e fibra ottica per massimizzare l'efficienza di accoppiamento.

Per quanto riguarda i ricevitori (figura 11), il loro ruolo risulta quello di riconvertire il segnale ottico in arrivo dalla fibra in un segnale elettrico dipendente dal tempo, recuperando il flusso di dati trasmessi nel canale di comunicazione. La componente principale risulta il fotorivelatore (photodetector) [50] [46], in genere accoppiato nella configurazione butt coupling alla fibra ottica, che converte la luce in elettricità tramite effetto fotoelettrico: le caratteristiche fondamentali necessarie per la comunicazione sono un'alta sensibilità, una risposta rapida, un rumore basso, un'alta affidabilità e una dimensione comparabile a quella della fibra. Quando un fotone incide nel fotorivelatore con un'energia $h\nu > E_{\text{bandgap}}$, allora viene assorbito e si genera una coppia elettrone-lacuna che tramite un campo elettrico viene trasportata nel semiconduttore: la fotocorrente I_p risultante, assumendo che non vi sia rumore, è direttamente proporzionale alla potenza ottica incidente P_{in} tramite $I_p = RP_{\text{in}}$, ove R è la responsivity. La grandezza fondamentale -adimensionale- η che determina l'efficienza viene definita come efficienza quantica $\eta = \frac{\text{electron generation rate}}{\text{photon incident rate}} = \frac{I_p/e}{P_{\text{in}}/h\nu} = \frac{h\nu}{e}R$; si aggiungono poi altri parametri di caratterizzazione come la larghezza di banda Δf ⁴⁹ e la corrente di buio I_{dark} . In genere a seconda di questi parametri, si può scegliere il tipo di fotorivelatore adatto al sistema di comunicazione⁵⁰: perlopiù si utilizzano fotodiodi p-n ($R \sim 1 \text{ A W}^{-1}$, $\Delta f \sim 0.8 \text{ GHz}$), fotodiodi p-i-n (PIN: $R \sim 0.4 - 0.9 \text{ A W}^{-1}$, $\Delta f \sim 0.3 - 300 \text{ GHz}$), fotodiodi a valanga (avalanche photodiodes, APD: $R \sim 5 - 130 \text{ A W}^{-1}$, $\Delta f \sim 0.2 - 300 \text{ GHz}$) e fotorivelatori MSM (metal-semiconductor-metal, $R \sim 0.2 - 1 \text{ A W}^{-1}$, $\Delta f \sim 0.3 - 900 \text{ GHz}$). La struttura precisa del tipo di rivelatore dipende in modo essenziale dal formato di modulazione usato nel trasmettitore: in generale nella prima parte (front-end) vi è il fotorivelatore con un preamplificatore a basso rumore, nella seconda parte (linear channel) un'amplificatore principale ad alto guadagno accoppiato ad un filtro passa-basso e nella terza e ultima parte vi è lo stadio di recupero dati (data-recovery stage). E' proprio quest'ultimo stadio che dipende dalla modulazione: nel caso sia analogica consiste semplicemente nella presenza di un demodulatore; mentre nel caso digitale vi è un circuito di decisione con un altro circuito adibito al recupero del segnale di clock. Infatti il segnale ottico in uscita dal cavo di fibra ottica ha un'ampiezza estremamente bassa e quindi la corrente elettrica in uscita dal fotodiode è molto debole: vi devono essere degli stadi di amplificazione del segnale, con eventualmente la presenza

Parameter	Silicon		Germanium		InGaAs	
	PIN	APD	PIN	APD	PIN	APD
Wavelength range (nm)	400-1100		800-1800		900-1700	
Peak (nm)	900	830	1550	1300	1300 (1550)	1300 (1550)
Responsivity ρ (A/W)	0.6	77-130	0.65-0.7	3-28	0.63-0.8 (0.75-0.97)	
Quantum efficiency(%)	65-90	77	50-55	55-75	60-70	60-70
Gain (M)	1	150-250	1	5-40	1	10-30
Excess noise factor ^b (x)	-	0.3-0.5	-	0.95-1	-	0.7
Bias voltage (-V)	45-100	220	6-10	20-35	5	<30
Dark current ^b (nA)	1-10	0.1-1.0	50-500	10-500	1-20	1-5
Capacitance (pF)	1.2-3	1.3-2	2-5	2-5	0.5-2	0.5
Rise time (ns)	0.5-1	0.1-2	0.1-0.5	0.5-0.8	0.06-0.5	0.1-0.5

Figura 12: Parametri caratteristici standard dei ricevitori PIN e APD ([50])

⁴⁹è una grandezza legata alla velocità con cui il fotorivelatore risponde alla variazione della potenza ottica incidente: se si introduce il tempo di salita T_{Tr} per la corrente generata (definito come il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore massimo) e se ne individuano i contributi derivanti dal tempo necessario alla coppia per arrivare ai contatti elettrici (τ_{tr}) e il tempo di risposta del circuito elettrico (τ_{RC}) allora si definisce larghezza di banda $\Delta f = \frac{1}{2\pi(\tau_{\text{tr}} + \tau_{\text{RC}})}$

⁵⁰Ovviamente entrano in gioco anche altri fattori nella selezione, come il rumore (di tipo termico e shot per tutti i fotorivelatori, dovuto inoltre anche al guadagno interno della corrente per gli APD)

di filtri ed equalizzatori per “aggiustare” la forma d’onda del segnale elettrico, prima del recupero dati della fase finale. Per quanto riguarda il preamplificatore nel front end, di solito viene inserito nel circuito in una configurazione di amplificatore a transimpedenza per avere un buon compromesso tra velocità (e quindi larghezza di banda elevata) e sensibilità, definita come la minima potenza ottica necessaria a raggiungere una certa performance del ricevitore. Quest’ultima è definita come minima potenza ottica P_{rec} , mediata nel tempo, necessaria a raggiungere nel caso di modulazione di tipo digitale uno specifico valore del BER (bit-error rate)⁵¹, nel caso della modulazione analogica di raggiungere uno specifico valore del SNR. Per quanto riguarda il linear channel, oltre all’amplificatore ad alto guadagno seguito da un filtro passa-basso (necessario per ridurre il rumore senza introdurre eccessivi errori, del tipo interferenza intersimbolica, ISI⁵²), vi può essere anche un equalizzatore per correggere la larghezza di banda del segnale in arrivo dal front end. Infine, nel caso di modulazione digitale, il circuito decisionale (decision circuit) compara l’output del linear channel con un valore di soglia, a tempi di campionamento determinati dal circuito che si occupa della ricostruzione del segnale di clock (clock-recovery circuit); decidendo se il segnale corrisponde al bit 1 o 0. Generalmente tutte le componenti del ricevitore, ad eccezione del fotorivelatore, possono essere integrate sullo stesso chip utilizzando la tecnologia a circuiti integrati (IT); con tecniche specifiche possono essere anche integrati tutti i componenti con la tecnologia a circuiti integrati optoelettronica (OEIC). Per quanto riguarda i ripetitori necessari alla rigenerazione del segnale, inizialmente si utilizzavano ripetitori optoelettronici in cui il segnale, attenuato in intensità, veniva prima riconvertito in segnale elettrico e poi rigenerato direttamente con un trasmettitore. Tale sistema diventa estremamente complesso, soprattutto per i sistemi con un multiplexing WDW, per cui usualmente si utilizzano degli amplificatori ottici [51], che amplificano direttamente il segnale in ingresso. Il principio fisico di funzionamento è sostanzialmente l’emissione stimolata: infatti un amplificatore ottico sostanzialmente è un laser senza feedback ottico, ossia senza la cavità ottica. Il guadagno ottico, se P_{out} e P_{in} sono le potenze in output e in input del segnale in onda continua (CW) che viene amplificato, $G = \frac{P_{out}(\omega)}{P_{in}(\omega)}$ in generale dipende non solo dalla frequenza ω del segnale incidente, ma anche dall’intensità locale $P(z) = P_{in} \exp(gz)$ (pensando ad un direzione privilegiata z) del fascio nel mezzo di amplificazione tramite il fattore di amplificazione $g(\omega)$. Altri parametri importanti per l’amplificatore ottico sono la cifra di rumore $F_n = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}}$, che quantifica la degradazione dell’SNR nell’amplificatore dovuta all’emissione spontanea (rumore termico). Gli amplificatori ottici maggiormente utilizzati sono i semiconductor optical amplifier (SOA), i raman amplifier (in questo caso si sfrutta lo scattering Raman stimolato, SRS,⁵³ tipico delle fibre in vetro siliceo quando si propaga un fascio luminoso di intensità elevata) e gli erbium-doped fiber amplifier (EDFA). In particolare per quanto riguarda gli EDFA, la loro elevata efficienza (soprattutto nel caso di lunghe distanze) è dovuta all’utilizzo di elementi delle terre rare inseriti come dopanti nel core della fibra: le proprietà dell’amplificatore vengono a dipendere solo dalla natura dell’elemento, sfruttato come mezzo di amplificazione, e si può essere molto selettivi nella lunghezza d’onda con la quale si opera in un range $0.5 - 3.5\mu\text{m}$ (l’erbio ${}_{68}\text{Er}$ permette di lavorare nella regione spettrale in cui vi è la minima attenuazione possibile per le fibre ottiche attuali, attorno a $1.55\mu\text{m}$).

⁵¹dato dalla probabilità di identificazione errata di 1 bit da parte del circuito di decisione del ricevitore

⁵²è un tipo di distorsione del segnale ricevuto, che si manifesta nell’allargamento e conseguente sovrapposizione di impulsi individuali al punto tale che il ricevitore è impossibilitato a distinguere gli elementi singoli del segnale

⁵³nel caso dello SRS il fotone incidente, anziché stimolare l’emissione di un altro fotone identico senza perdere energia, trasferisce parte dell’energia per la creazione di un altro fotone di energia minore (scattering anelastico) e parte viene assorbita dal mezzo sotto forma di vibrazioni molecolari (fononi ottici)

4 Caratteristiche fondamentali di una fibra ottica

Le fibre ottiche sono il componente principale dell'omonima struttura nel sistema di comunicazione: essenzialmente sono un tipo particolare di guide d'onda [2]. Essenzialmente si tratta di strutture costituite da conduttori e dielettrici nelle quali l'onda associata al segnale è vincolata -"guidata"- a seguire un ben determinato percorso nello spazio. La natura e le caratteristiche delle onde sono fissate dalla geometria e dalla topologia delle guide d'onda⁵⁴. Come vedremo, oltre alle familiari onde EM trasverse (TEM) ove sia \mathbf{E} che \mathbf{B} sono trasversi alla direzione di propagazione (un esempio importante sono le onde piane), possiamo trovare, nel caso delle guide d'onda, onde dove solo il campo elettrico \mathbf{E} (onde TE) o il campo magnetico \mathbf{B} (onde TM) è trasversale alla direzione di propagazione. In generale per avere un mezzo di trasmissione per canali di comunicazione con elevata capacità e adatto ad alte velocità di trasmissione dati, le guide d'onda devono essere costituite da dielettrici, in modo da evitare le elevate perdite ohmiche [7]. Usualmente si utilizza un qualche tipo di vetro di silice (vetro di quarzo, diossido di silicio amorfo SiO_2), sia in forma pura che con qualche particolare dopante; oppure dei tipi di plastica. La motivazione precisa della scelta del vetro è stata esplicitata nel capitolo 3; per quanto riguarda l'uso della plastica invece, ossia di polimeri, essa viene utilizzata perchè si tratta di un materiale economico e molto robusto: le prestazioni sono in ogni caso molto inferiori rispetto al vetro sia nell'attenuazione che nella capacità di trasmissione dati [27]. La maggior parte delle fibre ottiche consistono in una struttura cilindrica annidata, composta principalmente da un nucleo cilindrico, detto core, di indice di rifrazione n_{core} circondato da un rivestimento, detto cladding, avente indice di rifrazione $n_{\text{cladding}} < n_{\text{core}}$. Esternamente alla struttura vi sono in genere due strati costituiti da polimeri di plastica, detti buffer e jacket che garantiscono l'isolamento meccanico, la protezione da danni fisici e il riconoscimento del tipo di fibra tramite la colorazione (standard). La differenza frazionata degli indici di rifrazione $\Delta = \frac{n_{\text{core}} - n_{\text{cladding}}}{n_{\text{core}}}$ risulta un parametro fondamentale nella caratterizzazione della fibra ottica, e spesso numericamente risulta $\Delta \ll 1$. L'ottica geometrica, pur risultando una descrizione approssimata rispetto all'ottica elettromagnetica, è spesso utilizzata per un primo approccio fisico nella propagazione del segnale: la guida dell'onda luminosa nella fibra ottica può essere descritta in modo approssimativo da una successione di riflessioni interne totali (TIR) sull'interfaccia core-cladding, con ogni percorso ottico corrispondente ad un *modo di propagazione*. Questo permette di far viaggiare l'impulso luminoso su distanze lunghissime, senza interferenze e conservando gran parte della potenza ottica iniziale per la bassa attenuazione legata alla fibra ottica.

L'ottica geometrica è l'approssimazione più semplice nell'ambito della descrizione attuale dell'ottica classica⁵⁵, che si propone di spiegare alcuni fenomeni ottici legati alla propagazione del campo EM in certi mezzi ottici, con particolari strutture geometriche e distribuzioni dell'indice di rifrazione. Tecnicamente la luce è assunta essere un *campo scalare*, e un raggio luminoso definisce la direzione e il verso della propagazione dell'energia nel limite di lunghezza d'onda nulla ($\lambda \rightarrow 0$) [52]. Nella vasta variazione della lunghezza d'onda nello spettro EM, possiamo trovare delle situazioni fisiche ove la lunghezza d'onda risulta molto piccola rispetto alla dimensione degli oggetti attraverso cui passa la luce, nelle quali effetti di diffrazione e interferenza sono trascurabili e quindi possiamo trascurare la natura ondulatoria della luce. La propagazione dei raggi luminosi è fondata sul principio di Fermat, che afferma che la traiettoria di un raggio luminoso tra due punti è quello per

⁵⁴In genere esistono di vari tipi di guide d'onda (elettromagnetiche, acustiche): in base alla *frequenza* dell'onda trasmessa vi è una forma da preferire rispetto ad un'altra, e la dimensione in genere dev'essere dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda λ dell'onda guidata

⁵⁵L'ottica quantistica ne è un'ulteriore generalizzazione, che tiene in considerazione la QED

il quale la lunghezza del cammino ottico risulta *stazionaria* rispetto alle variazioni della traiettoria. Formalizzando con un approccio matematico questo principio variazionale, se $\int_A^B n(x, y, z) ds$ è il cammino ottico,

$$\delta \int_A^B n(x, y, z) ds = 0 \quad (38)$$

ove $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ è l'incremento infinitesimo della lunghezza della traiettoria geometrica. Un'osservazione si può fare sul principio di Fermat: la lunghezza del cammino *ottico* differisce dalla lunghezza del cammino *geometrico*, come se l'indice di rifrazione definisse una *misura* dello spazio per la luce. In altre parole possiamo considerare l'elemento di cammino ottico dL come un elemento di linea geometrico ds' in uno spazio virtuale, e l'indice di rifrazione rappresenta proprio il rapporto $\frac{ds}{ds'}$ se ds è l'elemento di linea nello spazio fisico [53]. Un mezzo ottico distorce quindi la "geometria della luce". La traiettoria del raggio sarà una curva nello spazio: parametrizzando con un parametro α , possiamo riscrivere 38 come

$$\delta \int_A^B L(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \dot{x}(\alpha), \dot{y}(\alpha), \dot{z}(\alpha)) ds = \delta \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = 0 \quad (39)$$

ove L è la lagrangiana ottica. Applicando la teoria del calcolo delle variazioni con estremi fissati, tenendo presente che il funzionale è dipendente da più funzioni, possiamo ottenere un sistema di 3 equazioni di E-L (Eulero-Lagrange) che si può subito riscrivere come [52]⁵⁶

$$\nabla n(x, y, z) = \frac{d}{ds} \left(n(x, y, z) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \quad (40)$$

detta equazione dei raggi (ray-equation). E' a partire da quest'ultima che, in approssimazione parassiale (vedi capitolo 1) fissando un asse privilegiato z , si ricavano le due PDE

$$\frac{\partial n(x, y, z)}{\partial x} = \frac{d}{dz} \left(n(x, y, z) \frac{dx}{dz} \right) \quad \frac{\partial n(x, y, z)}{\partial y} = \frac{d}{dz} \left(n(x, y, z) \frac{dy}{dz} \right) \quad (41)$$

le cui soluzioni $x(z)$ e $y(z)$ rappresentano le traiettorie del raggio luminoso. Un'osservazione di carattere generale: la riflessione e la rifrazione della luce ad una interfaccia piana tra due mezzi dielettrici, descritte come interazione da parte di un'onda piana incidente, è ben descritta dalle leggi di Snell e dalle formule di Fresnel. Questa visione è di tipo geometrico-ottica. In realtà un impulso ottico reale ha una distribuzione finita nello spettro in frequenza, e la situazione è più complicata. Alla scala della lunghezza d'onda i raggi riflessi e trasmessi non seguono l'evoluzione ottico-geometrica: trascurando le deformazioni in forma dei raggi secondari, si possono introdurre 4 tipi di *deviazioni* principali. Rispetto al piano di incidenza, vi sono spostamenti spaziali nel piano e all'esterno dal piano (spostamenti laterali) e similmente spostamenti angolari (deflessioni), che possono essere viste come variazioni nella posizione (*effetto Goos-Hanchen GH*) e nella direzione di propagazione (*effetto Imbert-Ferodov IF*) dei raggi secondari [54]. Tutti questi effetti possono verificarsi in una generica riflessione o rifrazione, per cui è necessario passare ad un'ottica di tipo elettromagnetico, fondata sulle equazioni di Maxwell, per descrivere in modo preciso un sistema ottico.

Prima di tornare alla descrizione delle fibre ottiche, bisogna discutere della definizione di indice di rifrazione. Le equazioni di Maxwell "macroscopiche", che hanno come scopo

⁵⁶ricordando che $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \frac{d}{d\alpha}$

lo studio dei campi EM nello spazio riempito di materia, utilizzano grandezze fisiche le cui medie sono calcolate rispetto ad elementi di volume *fisicamente infinitesimi*, senza tener conto delle fluttuazioni microscopiche di queste grandezze, dovute alla struttura molecolare della materia [55]. Per mezzi *lineari, isotropi e uniformi, in assenza di sorgenti e per campi in forma di onde piane armoniche*⁵⁷ è stato già evidenziato nel capitolo 2 che, potendo scrivere le equazioni costitutive come $\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathbf{H}$, si può ottenere l'equazione di Helmholtz nella forma [7]

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (42)$$

Se consideriamo un'onda piana EM con frequenza ω e vettore d'onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$, del tipo $\mathbf{F} = \Re(\mathbf{F}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)})$ ($\mathbf{F} = \mathbf{E}$ oppure $\mathbf{F} = \mathbf{B}$), allora sostituendo in 42 otteniamo la relazione $k^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = k^2 = \mu\epsilon\omega^2$, da cui la velocità di fase dell'onda piana risulta $v = \frac{\omega}{k} := \frac{c}{n(\omega)}$, con indice di rifrazione $n := \sqrt{\frac{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}{\mu_0\epsilon_0}}$. Nel caso generale (mezzo bianisotropo, dispersivo, disomogeneo) di un mezzo lineare in realtà $\overleftarrow{\epsilon}$ e $\overleftarrow{\mu}$ sono tensori di rango 3 complessi⁵⁸, e spesso sono necessari per descrivere il materiale altri due tensori complessi dello stesso rango $\overleftarrow{\gamma}$ e $\overleftarrow{\zeta}$ per tenere in considerazione fenomeni di accoppiamento tra i campi, ossia [56]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overleftarrow{\epsilon} & \overleftarrow{\gamma}/c \\ \overleftarrow{\zeta}/c & \overleftarrow{\mu}/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Lo studio di questi parametri e degli effetti non lineari ($\overleftarrow{\epsilon}$ e $\overleftarrow{\mu}$ dipendenti cioè dal modulo dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B}) permette una caratterizzazione praticamente completa del materiale e, nel caso della fibra ottica, risultano fondamentali alcuni di questi: ad esempio per lo studio della birifragenza (legata all'anisotropia del materiale) e dell'effetto Kerr (o effetto elettro-ottico non lineare del secondo ordine). Nel caso generale [56] risulta impossibile trovare una definizione di indice di rifrazione, chiaramente legato a tutte queste grandezze tensoriali. Se però (ad esempio) non vi è accoppiamento ($\overleftarrow{\zeta} = \overleftarrow{\gamma} = 0$), $\overleftarrow{\mu} = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$ e non si verifica assorbimento (mezzo dielettrico anisotropo), allora si può ancora definire il concetto di indice di rifrazione attraverso la cosiddetta *superficie degli indici*. In particolare per gli assi principali (x, y, z), definiti come a partire dagli autovettori della diagonalizzazione del tensore reale simmetrico⁵⁹ $\overleftarrow{\epsilon}$, risulta $(n_x, n_y, n_z) = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{xx}\mu}{\epsilon_0\mu_0}}, \sqrt{\frac{\epsilon_{yy}\mu}{\epsilon_0\mu_0}}, \sqrt{\frac{\epsilon_{zz}\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \right)$.

In generale le fibre possono permettere la propagazione di un singolo modo spaziale, e sono dette fibre single-mode (SMF); oppure possono consentire la propagazione ai molti modi spaziali differenti e in tal caso si parla di fibre multi-mode (MMF). Una delle differenze sostanziali è che per le SMF il diametro del core è ridotto a poche lunghezze d'onda della luce incidente; mentre nelle MMF il diametro del core può essere molto più esteso. Le SMF sono normalmente utilizzate per i sistemi di comunicazione a lunga distanza, perché le differenti velocità di gruppo dei differenti modi possono distorcere il segnale per alte velocità di trasmissione dei dati (dispersione intermodale); d'altra parte per distanze più corte le fibre multimode sono più convenienti per la bassa richiesta di potenza ottica e per l'alta capacità e affidabilità (ad esempio per reti tipo LAN, local area network).

⁵⁷in alternativa alla richiesta di campi in forma di onde piane armoniche si *deve* assumere che il mezzo sia *non dispersivo* nella derivazione seguente [56]

⁵⁸la parte immaginaria è spesso associata ai fenomeni di assorbimento [7]

⁵⁹si può dimostrare con argomenti di tipo termodinamico [55]

Le fibre MMF possono essere divise in due grandi categorie sulla base dell'indice di rifrazione: step-index fiber e gradient-index fiber (GRIN). Nel primo caso l'indice di rifrazione risulta costante nel core e nel cladding e nella visuale dell'ottica geometrica e i raggi luminosi viaggiano in linea retta (per il principio di Fermat 38); nel secondo l'indice di rifrazione decresce gradualmente dal core al cladding e quindi i raggi seguono curve lisce (figura 13). Analiticamente la struttura fisica risulta [57], se a è il raggio del core,

$$n_{\text{step}}(r) = \begin{cases} n_{\text{core}} & r \leq a \\ n_{\text{cladding}} & r > a \end{cases} \quad n_{\text{gradient}}(r) = \begin{cases} n_{\text{core}} \left[1 - \Delta \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha\right] & r \leq a \\ n_{\text{core}} [1 - \Delta] = n_{\text{cladding}} & r > a \end{cases} \quad (44)$$

In generale vi possono essere vari altri profili dell'indice di rifrazione, come i "profili W", triangolari, trapezoidali e Gaussiani [27], ma sono molto meno diffusi.

Nella step-index fiber la legge di Snell-Cartesio della rifrazione può anche essere utilizzata in modo diretto per derivare l'angolo di accettazione del raggio luminoso $\beta = \frac{1}{n_{\text{air}}} \arcsin(n_{\text{core}}^2 - n_{\text{cladding}}^2)^{60}$ per una ben determinata fibra ottica, sapendo che l'angolo critico di riflessione totale risulta $\phi_c = \arcsin\left(\frac{n_{\text{cladding}}}{n_{\text{core}}}\right)$. Quest'ultimo risulta un parametro importante per determinare se, a partire dall'angolo di incidenza θ_i sull'ingresso della fibra, un determinato raggio luminoso risulti guidato nel core⁶¹ ($\theta_i < \beta$) per effetto della riflessione totale oppure no ($\theta_i > \beta$): il fatto che Δ sia estremamente

ridotto implica che le fibre siano tipicamente *debolmente guidate*. Osserviamo che se Δ è elevato, allora è possibile sfruttare un'elevata quantità di luce incidente; ma vi è anche l'effetto di *dispersione modale* accennato sopra: nella visione dell'ottica geometrica, raggi di luce differenti che entrano nella fibra ottica nello stesso istante di tempo, ma ad angoli θ_i di incidenza differenti, viaggiano lungo percorsi di lunghezza diversa perdendo la sincronia temporale visto che la velocità di propagazione risulta la stessa. Detto in termini di ottica elettromagnetica, differenti modi di propagazione hanno velocità di gruppo diverse. L'effetto di quest'ultimo problema è l'allargamento della dimensione temporale di un impulso inviato in input: con una stima basata sulla lunghezza minima del percorso di un raggio luminoso ($l_{\text{min}} = L_{\text{fiber}}$) e massima ($l_{\text{max}} = \frac{L_{\text{fiber}}}{\sin(\phi_c)}$), e tenendo conto di una velocità di propagazione $v = \frac{c}{n_{\text{core}}}$, il ritardo temporale è [46] $\Delta T = \frac{l_{\text{max}} - l_{\text{min}}}{v} = \frac{L_{\text{fiber}} n_{\text{core}}^2 \Delta}{c n_{\text{cladding}}} \propto \Delta$. Dal punto di vista della trasmissione di informazioni, questo risulta in un limite sul bit rate B nel caso di modulazione digitale: visto che per consistenza $\Delta T < \frac{1}{B}$, allora il bit rate product risulta limitato da $B L_{\text{fiber}} < \frac{c n_{\text{cladding}}}{n_{\text{core}}^2 \Delta}$ con questo tipo di stima molto conservativa⁶². Le fibre step-index sono quindi le più utilizzate in campi *diversi da quelli delle comunicazioni* (es.LAN, visto che dalla stima precedente risulta che ai limiti fisici pratici

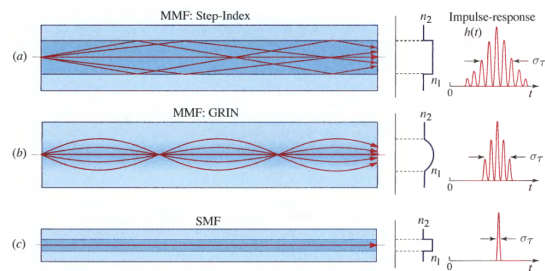


Figura 13: Rappresentazione in forma ottico-geometrica dei modi associati a 3 diverse semplici geometrie di fibra ottica, e l'allargamento dell'impulso dovuto ai diversi tipi di dispersione modale (MMF) e cromatica (MMF e SMF): a) Step-index fiber (multi-mode) b) Gradient-index fiber (multi-mode) c) Single-mode fiber ([57])

⁶⁰A volte si definisce il parametro $n_{\text{air}} \sin(\alpha) = \text{NA}$ come apertura numerica (NA). La derivazione matematica dell'espressione è immediata: dalla legge di Snell-Cartesio $n_{\text{air}} \sin(\theta_i) = n_{\text{core}} \sin(\theta_r)$, da cui conoscendo l'angolo limite interno per la riflessione totale $\phi_c = \frac{\pi}{2} - \theta_r$, si ottiene $n_{\text{air}} \sin(\theta_i) = \arcsin(n_{\text{core}}^2 - n_{\text{cladding}}^2)$. A volte visto che $n_{\text{air}} = 1.000277$ per aria in condizioni STP (0°C e a 1 bar di pressione), si approssima $n_{\text{air}} \simeq 1$ [58]

⁶¹solo principalmente in realtà, perchè spesso la distribuzione in intensità di un modo spaziale si estende anche oltre il core

⁶²Una nota sulla validità dell'espressione: oltre all'approssimazione di ottica geometrica, sono stati considerati *equamente* (senza tener conto della diversa attenuazione) solo i raggi *meridionali* e non quelli *obliqui*. In

$B L_{\text{fiber}} < 100\text{MB} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km.}$), e utilizzano un range di diametri per il core molto variabile (generalmente da $50\mu\text{m}$ a $100\mu\text{m}$, ma si può arrivare anche a $8\mu\text{m}$ o addirittura 2mm). Vari tipi di fibre step-index possono essere utilizzate, ma le fibre ottiche step-index più comuni sono costituite di vetro siliceo per la possibilità di trasmettere un elevato numero di informazioni in un range spettrale molto ampio. Per quanto riguarda le gradient-index fiber, esse sono invece ampiamente utilizzate nel ramo della comunicazione: la dispersione intermodale può essere in questo caso drasticamente ridotta, perchè la diminuzione dell'indice di rifrazione lungo la direzione radiale permette di avere una velocità di propagazione *maggiore* per i raggi luminosi con elevata inclinazione rispetto all'asse della fibra, ossia quelli che seguono un percorso più lungo. Possiamo ricavare una stima nel caso reale del valore del parametro ottimale α , che risulta $\alpha = 2(1 - \Delta)$ e che porta ad un limite superiore al bit rate product pari a $B L_{\text{fiber}} < \frac{8c}{\Delta^2 n_{\text{core}}}$. Nei casi tipici diventa $B L_{\text{fiber}} < 10\text{GB} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km.}$

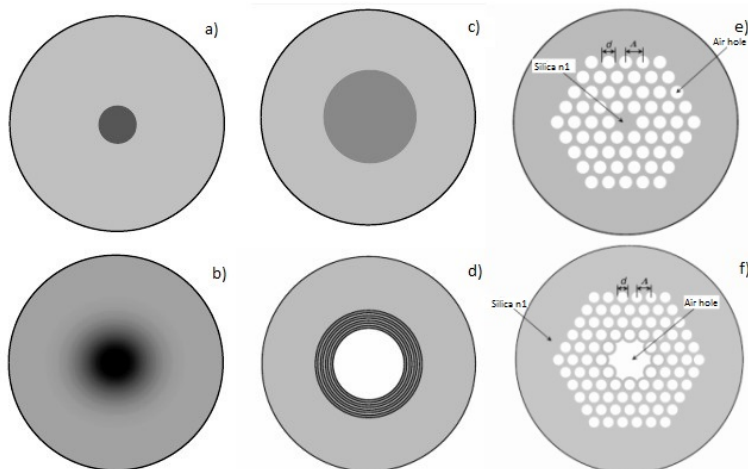


Figura 14: Descrizione generale dei profili classici di fibra ottica: a) Single-mode fiber b) Gradient-index fiber c) Step-index fiber d) Bragg fiber e) Solid-core photonic crystal fiber f) Hollow core photonic crystal fiber ([47])

Per quanto riguarda le fibre SMF, esse possiedono un core di dimensioni molto ridotte (usualmente $a \sim \mu\text{m}$) e un basso angolo di accettazione β : possono guidare soltanto un singolo modo spaziale, detto modo fondamentale⁶³. Visto che viene guidato un solo modo con una singola velocità di gruppo, la dispersione intermodale è assente e gli impulsi di luce arrivano senza una distorsione temporale. Inoltre vengono eliminati anche i possibili effetti di possibile interferenza casuale fra i modi, e l'attenuazione del segnale risulta complessivamente minore rispetto alle analoghe fibre MMF. Per questo tipo di fibre vengono molto spesso utilizzate nell'ambito dei sistemi di comunicazioni in fibra ottica con alti bit rate. Un tipo speciale di SMF (utilizzate ad esempio per interferometri laser, fibre laser, dispositivi di ottica integrata o studio della QKD) sono le fibre ottiche polarization-maintaining (PMF), ove la luce polarizzata linearmente, se inviata in ingresso con alcuni accorgimenti, può mantenere la sua polarizzazione lineare durante la propagazione fino all'uscita dalla fibra. Generalmente vi è un certo grado di birifrangenza per le fibre ottiche, anche per simmetrie di tipo circolare, per cui la polarizzazione della luce che si propaga cambia in modo incontrollato nel tempo [27] (dipende dalla lunghezza d'onda λ , e dalle fluttuazioni della temperatura T e degli sforzi meccanici σ lungo la fibra), e viene trasferita energia tra i due stati di polarizzazione indipendenti di uno stesso modo perchè le costanti di propagazione k_1 e k_2 sono molto simili, così come le loro fasi (teoricamente nel caso di simmetria perfettamente circolare dovrebbero coincidere per uno stesso modo spaziale). Nel nostro caso le PMF vengono appositamente costruite con una

particolare i primi sono confinati a viaggiare in un piano che attraversa l'asse della fibra (e quindi vengono riflessi nello stesso piano senza variare l'angolo di incidenza), mentre i secondi viaggiano su piani spostati dall'asse della fibra di una distanza R e che formano un angolo ϕ con la normale all'interfaccia core-cladding (quindi vengono riflessi ripetitivamente in più piani, seguendo una traiettoria elicoidale confinata in un guscio cilindrico di raggio interno R e raggio esterno a) [57]

⁶³nonostante il fatto che ci siano due differenti direzioni di polarizzazione

forte birifrangenza intrinseca, con una sezione di tipo ellissoidale, in modo che se il vettore di polarizzazione della luce inviata in ingresso risulta allineato con uno degli assi di birifrangenza allora viene preservato il suo stato di polarizzazione. Infatti k_1 e k_2 diventano in questo caso estremamente differenti per via della forte birifrangenza, per cui la fase relativa dei due modi risulta molto diversa e viene rimossa la quasi-degenerazione legata alla polarizzazione: un disturbo lungo la fibra può accoppiare entrambi i modi solo se possiede una componente spaziale di Fourier con un numero d'onda k tale da corrispondere a $|k_1 - k_2|$. Se $|k_1 - k_2|$ è sufficientemente elevato, le fluttuazioni usuali variano *troppo lentamente* per poter provocare un accoppiamento dei due stati di polarizzazione.

Altri tipi di fibra ottica sfruttano la periodicità della struttura geometrica, quasi sempre in direzione trasversale rispetto a quella di propagazione⁶⁴, per confinare in modo efficace la luce nella sua propagazione. La Bragg fiber è di questo tipo: anelli concentrici alternati con indice di rifrazione differente sono disposti attorno al core centrale, in una struttura dielettrica periodica a più strati ove il confinamento è basato sulla presenza di bandgap (“bande proibite”), ossia dei range di frequenze proibite per l'onda EM che si propaga nella fibra. Questo tipo di fibre ha un utilizzo molto ridotto, per via dei problemi con la stabilità meccanica, con l'espansione termica, con le perdite in attenuazione del segnale e della necessità di un alto contrasto nell'indice di rifrazione tra i vari strati. Vi è un altro tipo di fibra, molto recente (1996, Philip St. J. Russell) [59], che sfrutta -in genere- una periodicità trasversale bidimensionale, realizzata mediante l'utilizzo di cristalli fotonici: la photonic crystal fiber (PCF).

Questa applicazione risulta molto promettente perché queste fibre possiedono potenzialmente molti gradi di libertà nella loro microstrutturazione [60] [61], che consentono loro di guadagnare una varietà enorme di proprietà peculiari derivanti anche dall'utilizzo proprio dei cristalli fotonici. Attualmente esistono sostanzialmente⁶⁵ due tipi di fibre a cristalli fotonici, classificate secondo la struttura geometrica: solid-core PCF e hollow-core PCF. Entrambe acquisiscono proprietà uniche mediante tale struttura: l'effetto di guida d'onda è realizzato attra-

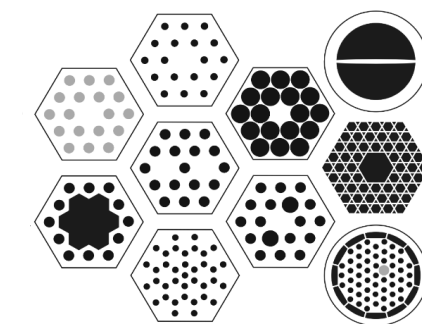


Figura 15: Possibili strutture per una fibra PCF

verso la costruzione di un reticolo periodico di fori d'aria (air holes) disposti parallelamente all'asse della fibra e per tutta la sua lunghezza, e il nucleo è definito da un *difetto*, ossia un foro di dimensione differente rispetto agli altri (hollow-core) o mancante (solid-core) (figura 14). I fori sono distanziati tra i centri di un parametro Λ (pitch) caratteristico ($\Lambda \sim 1 - 10\mu m$), hanno un diametro d e sono in numero N . Varie configurazioni sono possibili a seconda di questi parametri, come mostrato nella figura a fianco 15. Nel caso della solid-core PCF il meccanismo di guida ritorna ad essere quello della riflessione totale nell'interfaccia core-cladding, come nella fibra classica convenzionale, ma con indici di rifrazione *efficaci*. Infatti, se λ è la lunghezza d'onda della luce incidente, allora se $d \ll \lambda$ il cladding si comporta approssimativamente come un mezzo omogeneo il cui indice di rifrazione n_{cladding} eguaglia l'indice di rifrazione medio della struttura periodica esterna al core; e se quest'ultimo ha indice di rifrazione $n_{\text{core}} > n_{\text{cladding}}$ viene realizzata proprio la condizione di guida d'onda. In questo caso gli holes servono solo come “dopanti negativi” che riducono l'indice di rifrazione del cladding rispetto a quello del core, e non risulta ne-

⁶⁴eccezioni sono le fiber bragg grating

⁶⁵la classificazione *non* è univoca ed è molto recente: a volte si tiene più in considerazione il meccanismo di propagazione [57]

cessario che la struttura sia effettivamente periodica. Nel caso in cui $d \geq \lambda$ allora il cladding deve essere trattato come un mezzo periodico bidimensionale, ove n_{cladding} eguaglia l'indice di rifrazione medio, pesato con la distribuzione di intensità del fascio ottico, in modo che vi sia una forte dipendenza da λ , ossia in altre parole una forte dispersione nella guida d'onda. Questo permette, tra le altre cose, di operare come una struttura di single-mode fiber (SCF) su una banda veramente larga di lunghezze d'onda. Per quanto riguarda le hollow-core PCF, invece, la propagazione non può essere basata sul fenomeno della riflessione interna totale, e risulta fondata esclusivamente sulla presenza del *bandgap fotonico* nel cladding per via della struttura bidimensionale periodica caratteristica.

4.1 Fibra ottica single-core (SCF)

Ipotesi sullo studio del problema della fibra ottica dal punto di vista fisico

Consideriamo la struttura fisico-geometrica di una fibra ottica come un insieme misto di mezzi dielettrici macroscopici in posizione fissa nel tempo, composta da regioni di per sé omogenee prive di cariche e correnti libere, e utilizziamo un sistema di coordinate con un vettore posizione \mathbf{r} . Assumiamo che ogni mezzo dielettrico sia isotropo, lineare, non dispersivo e senza assorbimento. Allora le equazioni di Maxwell, utilizzando le equazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, diventano in funzione di \mathbf{E} e \mathbf{H}

$$\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (45)$$

$$\nabla \cdot [\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (46)$$

In generale, sia \mathbf{E} che \mathbf{H} sono funzioni complicate del tempo e dello spazio, ma visto che le equazioni di Maxwell sono lineari possiamo espandere i campi in funzione di modi armonici della forma $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{F} = \mathbf{B}$ o $\mathbf{F} = \mathbf{E}$): ogni soluzione potrà essere costruita tramite una sovrapposizione opportuna di tali modi. Sostituendo tali espressioni troviamo

$$\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (47)$$

$$\nabla \cdot [\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r})] = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (48)$$

Infine, disaccoppiando le due equazioni otteniamo

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \omega^2 \mu^2(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot [\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r})] = 0 \quad (49)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) = \omega^2 \epsilon^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0 \quad (50)$$

Nel nostro caso poniamo $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0$ ⁶⁶ e otteniamo per $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, se $\hat{\Theta}\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \nabla \times \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right)$, il problema agli autovalori (“master equation”) [62]

$$\hat{\Theta}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (51)$$

Gli autovettori $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ sono quindi le configurazioni spaziali dei modi armonici, e gli autovalori $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2$ sono proporzionali al quadrato delle frequenze ω dei modi armonici. Dal punto di vista matematico, $\hat{\Theta}$ è un operatore lineare, hermitiano e semidefinito positivo ($\omega^2 \geq 0$);

⁶⁶per la maggior parte dei materiali $\frac{\mu(\mathbf{r})}{\mu_0} \simeq 1$ risulta essere un'ottima approssimazione

inoltre modi $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ corrispondenti a frequenze differenti $\omega_1 \neq \omega_2$ sono ortogonali dal punto di vista del prodotto scalare hermitiano $(\mathbf{H}_{\omega_1}, \mathbf{H}_{\omega_2}) = 0$. Il campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ si può ovviamente ricavare direttamente da 47, una volta ricavato $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Diciamo che modi differenti sono *degeneri* se ad essi è associato lo stesso autovalore, ossia la stessa frequenza ω .

In presenza di una simmetria emergono proprietà importanti per un sistema elettromagnetico. Nel caso tipico di problemi bidimensionali -come nel caso della sezione trasversale di una fibra ottica- può accadere ad esempio che la forma geometrica sia invariante rispetto ad alcuni tipi di simmetrie, e questo fornisce un metodo diretto per la *classificazione* dei modi stessi. In particolare spesso i profili sono invarianti sotto l'operazione I di inversione spaziale $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$: se per un vettore \mathbf{a} si ha $I\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, allora per un campo vettoriale \mathbf{F} definiamo un operatore $\hat{\Omega}_I$ tale che $\hat{\Omega}_I \mathbf{F}(\mathbf{r}) = I\mathbf{F}(I\mathbf{r})$. In particolare $[\hat{\Omega}_I, \hat{\Theta}] = 0$, per cui se \mathbf{H} è un modo armonico con frequenza ω , allora $\hat{\Omega}_I \mathbf{H}$ è un modo con la stessa frequenza ω . Se i modi sono non degeneri \mathbf{H} e $\hat{\Omega}_I \mathbf{H}$ possono differire soltanto per una costante moltiplicativa α , con $\alpha^2 = 1$: allora da $\hat{\Omega}_I \mathbf{H} = \alpha \mathbf{H}$ otteniamo $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$. Allora possiamo classificare gli autovettori $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ a seconda che essi siano *pari* ($\mathbf{H} \rightarrow +\mathbf{H}$) o *dispari* ($\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$) sotto l'operatore $\hat{\Omega}_I$. Notiamo un aspetto importante: nell'EM classico \mathbf{H} è un pseudovettore mentre \mathbf{E} è un vettore sotto I . Allora $\hat{\Omega}_I \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +\mathbf{H}(-\mathbf{r})$ mentre $\hat{\Omega}_I \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$, e quindi un modo *pari* è definito dalle condizioni $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r})$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$, un modo *dispari* da $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{H}(-\mathbf{r})$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\mathbf{E}(-\mathbf{r})$. In aggiunta a questo tipo di simmetria, si assume che la fibra ottica possieda una simmetria continua di traslazione lungo l'asse di propagazione z . Allora, per uno spostamento \mathbf{d} , possiamo definire un operatore di traslazione $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ il quale $\hat{T}_{\mathbf{d}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{d})$: allora $[\hat{T}_{\mathbf{d}}, \hat{\Omega}_I] = 0$. Un sistema con una simmetria continua traslazionale lungo un asse z è invariante sotto ogni $\hat{T}_{d\hat{z}}$ per tale direzione, e si può provare che se e solo se un modo possiede la forma funzionale $e^{ik_z z}$ allora è autofunzione di ogni operatore $\hat{T}_{d\hat{z}} \forall d \in \mathbb{R}$ [63], ove k_z è la componente del vettore d'onda nella direzione di propagazione che può essere utilizzato nella classificazione dei modi.

Consideriamo una struttura fisica indefinitamente estesa lungo la direzione z e con caratteristiche elettromagnetiche e geometriche costanti al variare di z , e chiamiamola struttura cilindrica in direzione z . Definito il versore \hat{z} , separiamo i campi nelle direzioni parallele e trasverse all'asse $\mathbf{F} = F_z \hat{z} + F_{\perp} \hat{\mathbf{t}} = F_z \hat{z} + (\hat{z} \times \mathbf{F}) \times \hat{z}$ e definiamo la parte trasversa dell'operatore laplaciano $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Dalle equazioni di Maxwell 47, tenendo conto della variazione spaziale di $\epsilon(\mathbf{r})$ e assumendo sempre la forma armonica per i campi $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_{\perp}) e^{i(k_z z - \omega t)}$ otteniamo, le equazioni di Helmholtz nella forma [7]

$$\left[\nabla^2 + n^2(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla n^2(\mathbf{r})}{n^2(\mathbf{r})} \right] \quad (52)$$

$$\left[\nabla^2 + n^2(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0 (\nabla n^2(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (53)$$

ove $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0$ e $n(\mathbf{r}) = c\sqrt{\mu_0\epsilon(\mathbf{r})}$. Ora possiamo esprimere le componenti trasversali dei campi (rispetto all'asse z) \mathbf{E}_{\perp} e \mathbf{H}_{\perp} rispetto a quelle longitudinali \mathbf{E}_z e \mathbf{H}_z

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{i}{\gamma^2} (k_z \nabla_{\perp} E_z - \omega \mu_0 \hat{z} \times \nabla_{\perp} H_z) \quad (54)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{i}{\gamma^2} (k_z \nabla_{\perp} H_z + \omega \epsilon_0 \hat{z} \times \nabla_{\perp} E_z) \quad (55)$$

ove $\gamma^2 = n^2(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$ è la costante di propagazione radiale. Utilizzando 54 e 52 possiamo

dunque ricavare l'espressione per E_z e H_z :

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2)H_z - \left(\frac{\omega}{\gamma c}\right)^2 [\nabla_{\perp} n^2(\mathbf{r})] \cdot [\nabla_{\perp} H_z(\mathbf{r})] = -\frac{\omega k_z \epsilon_0}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \cdot [\nabla_{\perp} n^2(\mathbf{r}) \times \nabla_{\perp} E_z(\mathbf{r})] \quad (56)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2)E_z - \left(\frac{k_z}{\gamma n(\mathbf{r})}\right)^2 [\nabla_{\perp} n^2(\mathbf{r})] \cdot [\nabla_{\perp} E_z(\mathbf{r})] = -\frac{\omega k_z \mu_0}{\gamma^2 n^2(\mathbf{r})} \hat{\mathbf{z}} \cdot [\nabla_{\perp} n^2(\mathbf{r}) \times \nabla_{\perp} H_z(\mathbf{r})] \quad (57)$$

Osserviamo che le equazioni per E_z e H_z sono *accoppiate* tra loro: questo è dovuto sostanzialmente al fatto che, per una geometria qualsiasi, $\nabla_{\perp} n(\mathbf{r}) \neq 0$. Infatti nel caso si avesse $\nabla_{\perp} n(\mathbf{r}) = 0$, al posto di ottenere 52 dalle equazioni di Maxwell si ha la classica equazione di Helmholtz 42: in tal caso le equazioni per E_z e H_z risultano *disaccoppiate*. Per la nostra struttura fisica con proprietà di guida d'onda definiamo i modi **TE** (“transverse electric”) quelli tali per cui $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$, **TM** (“transverse magnetic”) quelli per cui $E_z \neq 0$ e $H_z = 0$, **TEM** quelli tali per cui $E_z = 0$ e $H_z = 0$ e *ibridi* (**HE** o **EH**) quelli con $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$. Le guide d'onda dielettriche differiscono dalle loro controparti conduttrici in 3 punti importanti: il campo EM non è più limitato nel volume ove si propagano i raggi luminosi per riflessione totale, il numero di modi confinati è *finito* e i modi usualmente non sono esclusivamente **TE** o **TM**. Questo è dovuto all'imporre di condizioni di *continuità dei campi* piuttosto che condizioni al bordo nel caso delle interfacce dielettriche [2]. Infatti dalla 56 segue che esistono modi **TE** o **TM** solo se, in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) $n(\mathbf{r}) = n(r)$ e i campi **E** e **H** non dipendono dalla coordinata azimutale ϕ ⁶⁷ [7]. Le soluzioni dell'equazione 56 e 54 vengono dette *modi vettoriali*, mentre quelle approssimate ottenute trascurando la presenza del gradiente dell'indice di rifrazione nell'espressione corretta 52 sono dette *modi scalari*, soluzioni di 42.

4.2 Ring-core fiber e Step-index fiber

Seguendo le orme di Brunet et al. [64], studiamo ora le soluzioni analitiche di una *ring-core fiber*, o fibra anulare, caratterizzata da una geometria ad anello ove è confinata per riflessione totale la propagazione dei raggi luminosi (vedi figura 17). Sia a il raggio interno dell'anello, b il raggio esterno, n_1 l'indice di rifrazione costante dell'anello “core”, n_2 l'indice di rifrazione costante del mezzo interno ed esterno all'anello “cladding” ($n_1 \leq n_2$). Risulta importante considerare il parametro $\rho := \frac{a}{b}$, perchè per $\rho \rightarrow 0$ otteniamo il caso semplice di *step-index fiber*; definiamo inoltre il contrasto tra gli indici di rifrazione come $n_0 := \frac{n_1}{n_2}$. Utilizziamo coordinate cilindriche (r, ϕ, z) . In questo particolare caso l'indice di rifrazione è costante per $0 \leq r \leq a$ ($n = n_2$), $a < r \leq b$ ($n = n_1$) e $r > b$ ($n = n_2$); per cui possiamo risolvere l'equazione di Helmholtz classica 42 per ogni settore con l'ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(r, \phi) e^{i(\omega t - k_z z)}$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(r, \phi) e^{i(\omega t - k_z z)}$. Otteniamo quindi le componenti z

⁶⁷Notiamo infatti che nel passaggio da un mezzo dielettrico con indice di rifrazione n_1 con sezione circolare di raggio b ad uno esterno con indice di rifrazione n_2 , nel caso di una struttura cilindrica lungo l'asse z , vi è un gradiente non nullo dell'indice di rifrazione $\nabla_{\perp} n^2(r) = -(n_1^2 - n_2^2) \delta(r - b) \hat{\mathbf{r}}$; per cui tale condizione è strettamente necessaria per l'esistenza di tali modi

dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H}

$$E_z = \begin{cases} C_1 I_\nu(wr) \cos(\nu\phi + \phi_0) & r \leq a \\ [A_1 J_\nu(ur) + A_2 N_\nu(ur)] \cos(\nu\phi + \phi_0) & a < r \leq b \\ C_2 K_\nu(wr) \cos(\nu\phi + \phi_0) & r > b \end{cases} \quad (58)$$

$$H_z = \begin{cases} D_1 I_\nu(wr) \sin(\nu\phi + \phi_0) & r \leq a \\ [B_1 J_\nu(ur) + B_2 N_\nu(ur)] \sin(\nu\phi + \phi_0) & a < r \leq b \\ D_2 K_\nu(wr) \sin(\nu\phi + \phi_0) & r > b \end{cases} \quad (59)$$

ove $\nu > 0$ è l'ordine (azimutale) intero del modo⁶⁸, ϕ_0 è un angolo di fase arbitrario, J_ν e N_ν sono le funzioni di Bessel del primo e del secondo tipo, I_ν e K_ν sono le funzioni modificate di Bessel del primo e del secondo tipo⁶⁹. I parametri u e w sono definiti come $u = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k_z^2}$ e $w = \sqrt{k_z^2 - n_2^2 k_0^2}$, ove $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il modulo del vettore d'onda nel vuoto per l'onda in propagazione. La costante di propagazione k_z e le 8 costanti (C_1, A_1, A_2, C_2) (D_1, B_1, B_2, D_2) sono determinate richiedendo la continuità delle componenti tangenziali E_z, E_ϕ, H_z e H_ϕ ⁷⁰ ai bordi, quando $r = a$ e $r = b$. Queste condizioni portano ad un set di 8 equazioni omogenee per le quali gli autovalori k_z si trovano risolvendo il sistema lineare di equazioni, e l'indice azimutale dei modi ν indicizza le soluzioni multiple (modi) del sistema di equazioni. In particolare, eliminando le costanti (D_1, B_1, B_2, D_2), otteniamo il sistema di 4 equazioni

$$\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \frac{\nu\beta}{a^2} [A_1 J_\nu(ua) + A_2 N_\nu(ua)] = k_0 \left\{ \left[B_1 \frac{J'_\nu(ua)}{ua} + B_2 \frac{N'_\nu(ua)}{ua} \right] + \frac{I'_\nu(wa)}{(wa)I_\nu(wa)} [B_1 J_\nu(ua) + B_2 N_\nu(ua)] \right\} \quad (60)$$

$$\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \frac{\nu\beta}{a^2} [B_1 J_\nu(ua) + B_2 N_\nu(ua)] = k_0 \left\{ n_1^2 \left[A_1 \frac{J'_\nu(ua)}{ua} + A_2 \frac{N'_\nu(ua)}{ua} \right] + \frac{I'_\nu(wa)}{(wa)I_\nu(wa)} n_2^2 [A_1 J_\nu(ua) + A_2 N_\nu(ua)] \right\} \quad (61)$$

$$\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \frac{\nu\beta}{b^2} [A_1 J_\nu(ub) + A_2 N_\nu(ub)] = k_0 \left\{ \left[B_1 \frac{J'_\nu(ub)}{ub} + B_2 \frac{N'_\nu(ub)}{ub} \right] + \frac{K'_\nu(wb)}{(wb)K_\nu(wb)} [B_1 J_\nu(ub) + B_2 N_\nu(ub)] \right\} \quad (62)$$

$$\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \frac{\nu\beta}{b^2} [B_1 J_\nu(ub) + B_2 N_\nu(ub)] = k_0 \left\{ n_1^2 \left[A_1 \frac{J'_\nu(ub)}{ub} + A_2 \frac{N'_\nu(ub)}{ub} \right] + \frac{K'_\nu(wb)}{(wb)K_\nu(wb)} n_2^2 [A_1 J_\nu(ub) + A_2 N_\nu(ub)] \right\} \quad (63)$$

da cui l'equazione modale caratteristica può essere ricavata con un determinante (4×4). Introduciamo ora un parametro fondamentale per lo studio della RCF e della SCF, ossia il parametro V_0 definito come $V_0 := k_0 b \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$: osserviamo che $V_0^2 = k_0^2 b^2 (n_1^2 - n_2^2) = b^2 (u^2 + w^2)$, per cui $u^2 + w^2$ risulta una costante per la fibra scelta una particolare onda che si propaga. Notiamo che u e w determinano le variazioni della componente radiale dei campi 58 nei vari settori della struttura fisico-geometrica della fibra RCF. Se u è elevato, allora vi sono più oscillazioni della distribuzione spaziale radiale dei campi nel "core"; viceversa se w è elevato allora vi è uno smorzamento rapido e una piccola penetrazione dell'onda nel "cladding". Se $u^2 \geq \frac{V_0^2}{b^2}$ allora $w^2 \leq 0$ e l'onda cessa di essere guidata nel "core": in tal caso si parla di modo radiativo. Un aspetto importante dei singoli modi è il cosiddetto "cutoff", ossia un valore di soglia che fissa il confine tra modo radiativo e modo guidato per una determinata fibra e per una determinata lunghezza d'onda dell'onda propagante λ . Per quanto detto quindi è il limite $w \rightarrow 0$ che fissa quindi le frequenze di cutoff dei singoli modi.

Per quanto riguarda i modi **TE** e **TM**, come osservato non vi può essere dipendenza azimutale dei campi dalla variabile ϕ , per cui $\nu = 0$. Ovviamente poi da 58 segue che

⁶⁸l'equazione di Helmholtz è a variabili separabili, e la componente angolare $\Phi(\phi)$ dei campi soddisfa ad una equazione del tipo $\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0$. Per la periodicità dei campi nella variabile ϕ allora ν dev'essere intero

⁶⁹Sia ν un parametro complesso. Allora $(J_\nu(x), N_\nu(x))$ è la coppia di soluzioni linearmente indipendenti che risolve l'equazione di Bessel $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$; mentre $(I_\nu(x), K_\nu(x))$ è la coppia di soluzioni linearmente indipendenti che risolve l'equazione di Bessel modificata $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$

⁷⁰tramite l'equazione 54 e osservando che $\mathbf{E}_\perp = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\phi \hat{\phi}$ e $\mathbf{H}_\perp = H_r \hat{\mathbf{r}} + H_\phi \hat{\phi}$ nelle coordinate cilindriche scelte

dobbiamo imporre $A_1 = A_2 = 0$ per i modi **TE** e $B_1 = B_2 = 0$ per i modi **TM**; per cui le equazioni di continuità si riducono alle 60 per i **TE** e 61-63 per i **TM**. Per quanto riguarda i modi **HE** e **EH**, essi corrispondono rispettivamente ai casi in cui $E_z(r=a) = H_z(r=a) = 0$ e $E_z(r=b) = H_z(r=b) = 0$, con ovviamente $\nu \geq 1$. I modi **TE**, **TM**, **EH** e **HE** sono le soluzioni esatte dell'equazione di Helmholtz nella forma esatta 52, per cui rappresentano i *modi vettoriali*. Con l'ausilio delle relazioni asintotiche per le funzioni di Bessel si vede che le condizioni di cutoff, riespresse con i parametri generali V_0 e ρV_0 , risultano

Mode	Cutoff
TE _{0,m}	$J_0(V_0)N_2(\rho V_0) - N_0(V_0)J_2(\rho V_0) = 0$
TM _{0,m}	$J_0(V_0)N_2(\rho V_0) - N_0(V_0)J_2(\rho V_0) = \frac{1-n_0^2}{n_0^2}[J_0(V_0)N_0(\rho V_0) - J_0(\rho V_0)N_0(V_0)]$
HE _{1,m} ($\nu = 1$)	$J_1(V_0)N_1(\rho V_0) = J_1(\rho V_0)N_1(V_0)$
HE _{ν,m} ($\nu > 1$)	$J_{\nu-2}(V_0)N_\nu(\rho V_0) - N_{\nu-2}(V_0)J_\nu(\rho V_0) = \frac{1-n_0^2}{1+n_0^2}[J_\nu(V_0)N_\nu(\rho V_0) - J_\nu(\rho V_0)N_\nu(V_0)]$
EH _{ν,m}	$J_{\nu+2}(\rho V_0)N_\nu(V_0) - N_{\nu+2}(\rho V_0)J_\nu(V_0) = \frac{1-n_0^2}{1+n_0^2}[J_\nu(\rho V_0)N_\nu(V_0) - J_\nu(V_0)N_\nu(\rho V_0)]$

Tabella 1: Condizioni di cutoff per le fibre RCF

ove l'indice radiale m relativo ai modi indicizza le diverse soluzioni dell'equazione modale caratteristica per un ν fissato.

Nel limite $a \rightarrow 0$ la geometria RCF diventa uguale a quella SCF con raggio del core pari a b : utilizzando ancora il comportamento asintotico delle funzioni di Bessel otteniamo

Mode	Cutoff
TE _{0,m} , TM _{0,m}	$J_0(V_0) = 0$
HE _{1,m} ($\nu = 1$)	$J_1(V_0) = 0$
HE _{ν,m} ($\nu > 1$)	$J_{\nu-2}(V_0) = \frac{1-n_0^2}{1+n_0^2}J_\nu(V_0)$
EH _{ν,m}	$J_\nu(V_0) = 0$

Tabella 2: Condizioni di cutoff per le fibre SCF

Nel caso della step-index fiber la distribuzione dei campi **E** e **H** può essere scritta nella forma, analoga alla 58 [65]

$$E_z = \begin{cases} \widehat{A}_1 J_\nu(ur) \cos(\nu\phi + \phi_0) & r \leq b \\ \widehat{C}_1 K_\nu(wr) \cos(\nu\phi + \phi_0) & r > b \end{cases} \quad (64)$$

$$H_z = \begin{cases} \widehat{B}_1 J_\nu(ur) \sin(\nu\phi + \phi_0) & r \leq b \\ \widehat{D}_1 K_\nu(wr) \sin(\nu\phi + \phi_0) & r > b \end{cases} \quad (65)$$

da cui si nota subito che i modi **TE**/**TM** a simmetria azimutale corrispondono ai raggi meridiani, mentre i modi **HE**/**EH** con una variazione angolare del tipo $\sin(\nu\phi)$ o $\cos(\nu\phi)$ corrispondono a raggi sghembi⁷¹. Osserviamo, quindi, che un modo è rappresentato dagli indici ν e m , che caratterizzano la distribuzione azimutale e radiale rispettivamente; inoltre vi sono due configurazioni indipendenti dei vettori **E** e **H** per ogni modo, corrispondenti ai *due diversi stati di polarizzazione*. Il caso $n_1 \rightarrow n_2$ (o $n_0 \rightarrow 1$) corrisponde a fibre *debolmente guidate* (weakly-guiding), che nell'ambito dell'ottica geometrica significa che i raggi guidati sono parassiali. In effetti le componenti longitudinali (lungo l'asse z) dei campi **E** e **H** sono molto ridotte rispetto a quelle trasversali e le onde guidate sono approssimativamente di tipo **TEM**. I modi polarizzati linearmente di tipo (ν, m) sono usualmente denotati come modi **LP** _{νm} , e i due stati di polarizzazione relativi ad ognuno di essi sono associati alla

⁷¹infatti le onde **TE** e **TM** vengono mescolate nella riflessione interna totale dei raggi luminosi

stessa costante di propagazione k_z e alla stessa distribuzione spaziale dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} . I modi LP sono anche le soluzioni esatte dell'equazione di Helmholtz nella forma 42, per cui rappresentano i *modi scalari* corrispondenti ad una serie di modi vettoriali differenti.

4.3 Analisi modale del campo EM in fibra ottica e modi OAM

In generale, sia per le SCF che per le RCF, si cercano di costruire delle *mappe modali* ove risulti più chiaro il tipo e il numero di modi associati a determinati parametri della fibra ottica, nello specifico ρ , V_0 e n_0^2 . Per ogni modo in fibra, la condizione di cutoff specifica la relazione funzionale tra ρ e V_0 per quel modo: questo definisce un *confine* di regioni parametriche ove uno specifico numero di modi sono supportati dalla fibra. I modi scalari LP sono legati all'unico parametro V_0 per la SCF (mappa modale 1D) e alla coppia (V_0, ρ) per le RCF (mappa modale 2D); mentre per i modi vettoriali in entrambe le geometrie acquista importanza anche il parametro n_0^2 per la classificazione completa. Nel caso di modi vettoriali il primo modo fondamentale guidato, sia per le SCF che per le RCF, risulta $\mathbf{HE}_{1,1}$: visto che per molte applicazioni la fibra ottica viene utilizzata nella condizione single-mode, sarebbe utile cercare nelle equazioni di cutoff la condizione sui parametri affinché il primo modo di ordine superiore $\mathbf{TE}_{0,1}$ venga soppresso.

Dalla tabella 2 per le SCF si ricava la condizione $J_0(V_0) = 0 \Rightarrow V_0 \lesssim 2.405$; mentre dalla tabella 1 per le RCF si trova $\frac{J_0(V_0)}{N_0(V_0)} = \frac{J_2(\rho V_0)}{N_2(\rho V_0)}$, che risulta una condizione complessiva sulla coppia di parametri (V_0, ρ) . In generale *non* esistono formule esatte per conoscere il numero complessivo di modi supportati per le due geometrie SCF/RCF a partire dai parametri caratterizzanti, ma solo numeriche. Per quanto riguarda le SCF si può ad esempio mostrare che il numero di modi per un parametro V_0 si ha $N_{\text{modes}} \cong 4 \frac{V_0^2}{\pi^2} + 2$ [57].

Per le RCF in genere si cerca di utilizzare le condizioni di cutoff dei modi LP per determinare la regione nella mappa modale di parametri (V_0, ρ) [57], rappresentata in figura 16. Inoltre spesso per rappresentare i modi di una determinata fibra ottica si utilizza esprimere anche la costante di propagazione normalizzata $\beta = \frac{k_z^2/k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ in funzione della frequenza normalizzata V_0 per visualizzare direttamente le variazioni delle condizioni di cutoff dei modi vettoriali. Infatti per ogni modo in genere si definisce $\bar{n} = \frac{k_z}{k_0}$ come *indice di rifrazione efficace*, intendendo fisicamente che tale modo si propaga (è guidato) con $n_1 > \bar{n} > n_2$. Per modi simmetrici dal punto di vista azimutale, ossia i modi $\mathbf{LP}_{0,m}$ nell'approssimazione scalare e i modi $\mathbf{HE}_{1,m}$ nelle soluzioni vettoriali, esiste una degenerazione doppia, dovuta alle orientazioni dei due stati di polarizzazione ortogonali. Questi modi sono uniformemente polarizzati e quindi non portano OAM: possono essere considerati “orizzontali” (H), “verticali” (V) o loro combinazioni lineari; o equivalentemente a polarizzazione circolare destra (R) o sinistra (L) (o loro combinazioni lineari, polarizzazione ellittica)⁷².

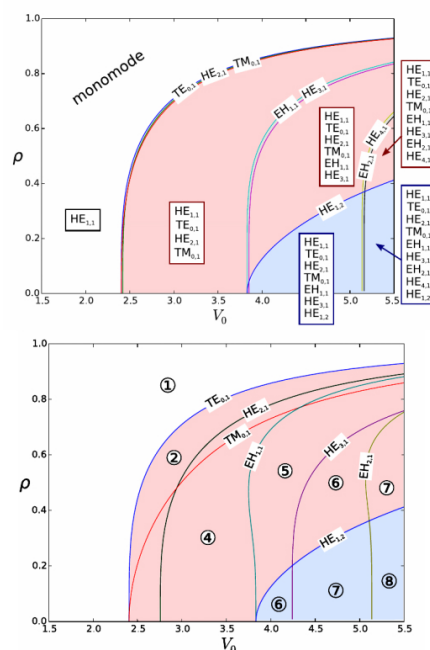


Figura 16: Mappa modale caratteristica per una RCF: sopra $n_0^2 = 1.042$, sotto $n_0^2 = 2.085$. Si nota chiaramente che tutti i cutoff dei modi eccetto $\mathbf{TE}_{0,m}$ e $\mathbf{HE}_{1,m}$ sono spostati verso destra nel caso $n_0^2 = 2.085$ rispetto a $n_0^2 = 1.042$ ([64])

⁷²in modo da poter assegnare un ben definito valore di SAM ($S = \pm 1$) ad ogni fotone del fascio di luce

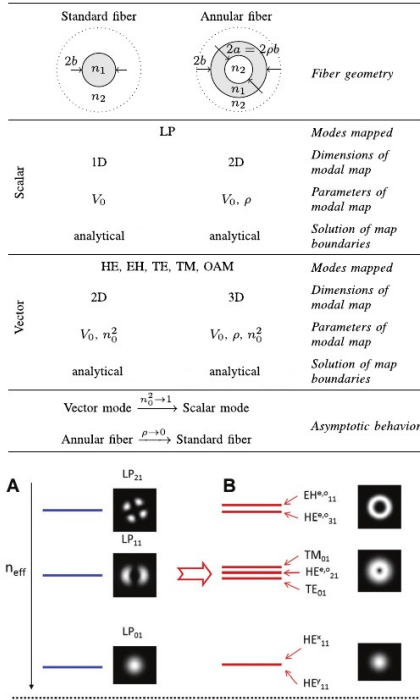


Figura 17: Modi scalari e modi vettoriali relativi ad una stessa geometria di fibra ottica RCF ([64] [66])

Per le prime soluzioni di ordine superiore designate come modi $\mathbf{LP}_{1,1}$ nell'approssimazione scalare [66], esistono 4 soluzioni modali vettoriali $\mathbf{TE}_{0,1}$, $\mathbf{HE}_{2,1}^{\text{even}}$, $\mathbf{HE}_{2,1}^{\text{odd}}$ e $\mathbf{TM}_{0,1}$, ove con “odd” e “even” è stata indicata la parità (figura 17). Tali due modi $\mathbf{HE}_{2,1}$ sono strettamente degeneri, e hanno un indice di rifrazione efficace n_{eff} differente da quello dei modi $\mathbf{TE}_{0,1}$ e $\mathbf{TM}_{0,1}$. Quindi tutte le soluzioni di ordine superiore (ossia $\mathbf{LP}_{\nu,m}$ con $\nu > 1$) comprendono due distinte soluzioni modali che sono doppiamente degeneri, chiamate $\mathbf{HE}_{\nu+1,m}$ ed $\mathbf{EH}_{\nu-1,m}$ rispettivamente. In generale modi con indice n_{eff} simile hanno anche simili velocità di gruppo, e formano un singolo *gruppo modale*. In questo contesto, il gruppo modale $\mathbf{LP}_{1,m}$ è la rappresentazione scalare dei 4 modi vettoriali $\mathbf{TE}_{0,m}$, $\mathbf{HE}_{2,m}^{\text{even}}$, $\mathbf{HE}_{2,m}^{\text{odd}}$ e $\mathbf{TM}_{0,m}$, e gli altri $\mathbf{LP}_{\nu,m}$ comprendono combinazioni di modi \mathbf{HE} ed \mathbf{EH} .

Nel nostro sistema di coordinate i modi illustrati non possiedono vortici ottici, per cui non possono trasportare OAM. Infatti i modi $\mathbf{HE}_{\nu+1,m}$ ed $\mathbf{EH}_{\nu-1,m}$, con $\nu > 1$, hanno la seguente distribuzione del campo elettrico trasversale

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{HE}_{\nu+1,m}^{\text{even}} \\ \mathbf{HE}_{\nu+1,m}^{\text{odd}} \end{Bmatrix} = G_{\nu,m}(r) \begin{Bmatrix} \hat{x} \cos(\nu\phi) - \hat{y} \sin(\nu\phi) \\ \hat{x} \sin(\nu\phi) + \hat{y} \cos(\nu\phi) \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{EH}_{\nu-1,m}^{\text{even}} \\ \mathbf{EH}_{\nu-1,m}^{\text{odd}} \end{Bmatrix} = G_{\nu,m}(r) \begin{Bmatrix} \hat{x} \cos(\nu\phi) + \hat{y} \sin(\nu\phi) \\ \hat{x} \sin(\nu\phi) - \hat{y} \cos(\nu\phi) \end{Bmatrix} \quad (66)$$

ove $G_{\nu,m}(r)$ è la distribuzione radiale del corrispondente modo scalare \mathbf{LP} associato [66]. Siccome le soluzioni pari e dispari di ognuno di questi modi formano una coppia degenera, possiamo equivalentemente rappresentare l'autostato come combinazione lineare di un'altra coppia degenera in un altro *sistema di coordinate* [67]. Nello specifico

$$\mathbf{E}_{\perp,\nu,m} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{\nu,m}^{\pm} \\ \mathbf{W}_{\nu,m}^{\pm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{HE}_{\nu+1,m}^{\text{even}} \pm i\mathbf{HE}_{\nu+1,m}^{\text{odd}} \\ \mathbf{EH}_{\nu-1,m}^{\text{even}} \pm i\mathbf{EH}_{\nu-1,m}^{\text{odd}} \end{Bmatrix} = G_{\nu,m}(r) \begin{Bmatrix} \sigma^{\pm} e^{\pm i\nu\phi} \\ \sigma^{\mp} e^{\pm i\nu\phi} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

ove $\sigma^{\pm} = \hat{x} \pm i\hat{y}$ rappresenta la polarizzazione circolare sinistra/destra, denotata anche con SAM corrispondente a $\pm\hbar$. Notiamo sia lo stato di polarizzazione uniforme sia la presenza del fattore $e^{\pm i\nu\phi}$ legato al trasporto da parte del modo guidato di stati con OAM pari a $\pm\nu\hbar$. Questi possono appunto essere rappresentati dalla combinazione lineare con una differenza di fase di $\frac{\pi}{2}$ dei modi vettoriali $\mathbf{HE}_{\nu+1,m}$ o dei modi $\mathbf{EH}_{\nu-1,m}$. I due tipi di stati OAM $\mathbf{V}_{\nu,m}^{\pm}$ e $\mathbf{W}_{\nu,m}^{\pm}$ si distinguono comparando il segno di OAM e SAM (polarizzazione circolare) [68]: nello specifico nel caso omogeneo $\mathbf{V}_{\nu,m}^{\pm}$ SAM e OAM hanno lo stesso segno e nel caso disomogeneo $\mathbf{W}_{\nu,m}^{\pm}$ segno opposto. Si identificano i modi $\mathbf{V}_{\nu,m}^{\pm}$ e $\mathbf{W}_{\nu,m}^{\pm}$ con lo stesso (ν, m) come famiglia OAM [69]. I modi \mathbf{EH}/\mathbf{HE} e i modi OAM sono *descrizioni equivalenti* degli stessi autostati dell'equazione vettoriale delle onde sotto l'approssimazione di fibre debolmente guidate. Le equazioni 66 e 67 descrivono solo i modi con $\nu > 1$. Il modo fondamentale con $\nu = 0$ può essere descritto da queste equazioni notando che

legato alla distribuzione spaziale dei campi nel caso dei modi L/R

non vi sono modi **EH** associati a $\nu = 0$, per cui solo i modi **HE**_{1,m} concorrono allo stato OAM (inoltre le combinazioni lineari di questi ultimi forniscono sempre stati con SAM $\pm\hbar$). Per quanto riguarda infine gli stati con $\nu = 1$, essi sono differenti in modo *unico* dagli altri modi in fibra. La forma analitica di questi modi è adeguatamente descritta da 66, purchè sostituiamo **EH**_{0,m}^{even} con **TM**_{0,m} e **EH**_{0,m}^{odd} con **TE**_{0,m}: tuttavia è doveroso osservare che questi due modi ora non sono più una coppia degeneri. Quindi, mentre si potrebbe utilizzare la combinazione lineare di modi **HE** con $\nu = 1$ per formare modi OAM, lo stesso non può essere fatto con i modi **TE** e **TM**. Scriviamo esplicitamente le soluzioni per il gruppo con $\nu = 1$ nella base OAM

$$\mathbf{E}_{\perp,1,m} = \begin{Bmatrix} \mathbf{HE}_{2,m}^{\text{even}} \pm i\mathbf{HE}_{2,m}^{\text{odd}} \\ \mathbf{TE}_{0,m} \\ \mathbf{TM}_{0,m} \end{Bmatrix} = G_{1,m}(r) \begin{Bmatrix} \sigma^{\pm} e^{\pm i\phi} \\ \frac{1}{2}(\sigma^{-} e^{i\phi} + \sigma^{+} e^{-i\phi}) \\ \frac{-i}{2}(\sigma^{-} e^{i\phi} - \sigma^{+} e^{-i\phi}) \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Essenzialmente gli stati OAM sono quindi formati dallo stesso gruppo modale **LP** _{ν,m} , sebbene con differenti modi vettoriali e combinazioni di modi. Per fibre con $n_0^2 \simeq 1$ si ha $n_{\text{eff,EH}} \simeq n_{\text{eff,HE}}$, per cui la famiglia OAM è suscettibile di un forte accoppiamento tra **HE** ed **EH** dovuto alle perturbazioni (deterministiche o casuali) che rendono la fibra birifrangente: tipicamente l'output della fibra assomiglia infatti a quello tipico dei modi **LP**. Comunque, il campo risultante non è un modo della fibra se non possiede un indice di rifrazione efficace n_{eff} : la divisione -splitting- tra coppie degeneri di stati OAM può essere aumentata con una guida d'onda tale per cui a campi **E** ed **H** elevati corrisponda un *alto contrasto* degli indici di rifrazione n_0^2 , e inoltre in genere aumenta con ν . In particolare le RCF, da questo punto di vista, sono convenienti perchè mimano la struttura dei modi OAM, e lo spessore $b - a$ può essere scelto adeguatamente per restringere il numero di modi guidati nella fibra ottica. In particolare per la trasmissione di modi OAM l'obiettivo è generalmente una separazione degli indici efficaci tra **V** _{ν,m} [±] e **W** _{ν,m} [±] pari ad almeno 10^{-4} . Dalle condizioni di cutoff nel caso delle RCF 1 notiamo che, tranne i modi **TE**_{0,m} e **HE**_{1,m}, tutti gli altri hanno un valore di cutoff sempre maggiore aumentando il contrasto degli indici n_0^2 ; inoltre vi sono regioni nella mappa modale (V_0, ρ) definite all'interno dei singoli gruppi modali oltre che tra un gruppo modale e un altro [66].

Considerazioni ulteriori sull'attenuazione, sulla larghezza di banda e sugli effetti non lineari

Per descrivere in modo completo una fibra ottica, occorre esaminare in modo dettagliato i fattori che influenzano l'attenuazione e la larghezza di banda. L'attenuazione è legata al fatto che la potenza ottica di un raggio luminoso che viaggia in una fibra ottica decresce esponenzialmente con la distanza secondo la *legge di Beer* $P_{\text{out}} = P_{\text{in}} e^{-\hat{\alpha}L}$: in unità dB km⁻¹ possiamo esprimere il coefficiente di attenuazione come $\alpha = \frac{10}{\log(10)} \hat{\alpha} = -\frac{10}{L} \log_{10} \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right)$ [46]. In questo caso vi sono vari meccanismi che intervengono quali

- (a) Assorbimento del materiale: è un meccanismo di attenuazione dovuto sia alla composizione del materiale (assorbimento intrinseco) sia alle impurità introdotte nel processo di fabbricazione della fibra (assorbimento estrinseco), che porta ad una trasformazione in calore dell'energia associata all'onda portante. Per i vetri di silice vi sono due meccanismi intrinseci di assorbimento alle frequenze ottiche: un picco di assorbimento centro nella regione dell'ultravioletto (UV), dovuto alle transizioni elettroniche all'interno delle molecole del vetro, che si estende nelle lunghezze d'onda più corte banda spettrale di trasmissione della fibra, e un picco di assorbimento nell'infrarosso,

dovuto alle vibrazioni molecolari (ad esempio di SiO), che si estende nelle lunghezze d'onda più lunghe della stessa finestra di trasmissione. L'attenuazione dovuta a processi estrinseci è causata invece principalmente dall'assorbimento da parte dell'acqua (come ioni OH⁻) introdotti nel vetro durante la tiratura della fibra tramite fiamma ossidrica: solo una finestra spettrale stretta tra 1.3μm e 1.55μm non risente di tale picco di assorbimento. Infatti generalmente le fibre ottiche utilizzano una banda spettrale di trasmissione da 1.46μm a 1.675μm, che si trova nella finestra spettrale ove l'attenuazione della fibra realizzata con vetro in silice è minore⁷³, ossia quella attorno al valore *standard* $\lambda = 1.55\mu\text{m}$. Tale banda viene poi suddivisa in 4 sottobande: nell'ordine banda S, C, L e U (figura 18).

- (b) Processi di scattering: rappresentano un meccanismo fondamentale di attenuazione che nasce da fluttuazioni locali microscopiche nella densità del mezzo (vetro in silice *amorfo*), e quindi anche da fluttuazioni casuali dell'indice di rifrazione n . Queste disomogeneità, piccole in dimensione rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda portante, portano ad una attenuazione intrinseca del tipo $\alpha_R = \frac{C}{\lambda^4}$, ove $C = \frac{8\pi^3}{3} n^8 p^2 \beta T_f k_B$ e k_B è la costante di Boltzmann, β la compressibilità isoterma a $T = T_c$ (temperatura critica), p il coefficiente fotoelastico medio⁷⁴, T_f una temperatura fittizia caratteristica del materiale⁷⁵ e n l'indice di rifrazione della fibra (o meglio del core). Nei casi pratici $C = 0.7 - 0.9 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \mu\text{m}$, per cui alla lunghezza d'onda convenzionale $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ risulta $\alpha_R = 0.12 - 0.16 \text{ dB km}^{-1}$, che è il contributo maggiore all'attenuazione in questa finestra spettrale. In realtà, vi sono anche processi di scattering di Mie, dovuti alle imperfezioni all'interfaccia core-cladding e quindi alle disomogeneità dell'indice di rifrazione su scale maggiori di quelle della lunghezza d'onda.
- (c) Curvatura della fibra: l'attenuazione del segnale può avvenire sia per effetti di *macrocurvatura* che di *microcurvatura*. Nel primo caso, visto che il principio fisico della fibra ottica è basato sulla riflessione totale interna, vi è un angolo critico $\theta_{\text{crit}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{cladding}}}{n_{\text{core}}}\right)$: in una visione geometrica dell'ottica può accadere che l'angolo di incidenza del raggio luminoso diventi minore di quello critico, per cui il raggio esce dal core. Da un punto di vista dell'ottica "elettromagnetica" fondata sulle equazioni di Maxwell una parte dell'energia del modo di propagazione viene dispersa nel cladding: l'attenuazione dovuta alla curvatura risulta in questo caso $\alpha_C \propto \exp\left(\frac{R}{R_c}\right)$, ove R è il raggio di curvatura della fibra piegata e $R_c = \frac{a}{n_{\text{core}}^2 - n_{\text{cladding}}^2}$ (a raggio del core). In pratica si trova che per le fibre single-core comuni $R_c = 0.2 - 0.4\mu\text{m}$, per cui le attenuazioni dovute alla macrocurvatura sono in genere trascurabili ($R \geq 5\text{mm} \Rightarrow \gamma \leq 0.01 \text{ dB km}^{-1}$). Per quanto riguarda la microcurvatura, essa è legata alle distorsioni casuali dell'asse durante il cablaggio e può portare, a meno di prendere le dovute precauzioni, ad attenuazioni anche dell'ordine di 100 dB km^{-1} sia per le fibre single-

⁷³le altre due bande si trovano nella regione attorno a $\lambda = 0.85\mu\text{m}$ e $\lambda = 1.30\mu\text{m}$

⁷⁴vale $p = \left\langle \frac{\Delta\epsilon_{||,\perp}}{F} \right\rangle$, ove F è l'intensità di uno sforzo applicato sul materiale e $\epsilon_{||,\perp}$ è la variazione della costante dielettrica tra la direzione dello sforzo e quella perpendicolare (si assume una geometria assiale)

⁷⁵introdotta da Tool per spiegare in modo fenomenologico il comportamento del vetro nella regione di transizione vetrosa, da alcuni è utilizzata come parametro d'ordine della transizione. In realtà, preso un materiale amorfo come il vetro in equilibrio termodinamico nello stato liquido ad una temperatura T_f prossima alla regione di transizione vetrosa, e scelta una proprietà $P=P(T)$, un raffreddamento istantaneo da T_f a T' porta a variare la proprietà P con una velocità molto ridotta, per via dei lunghi tempi di rilassamento dovuti ai processi cinetici (aumento di viscosità), ma la temperatura in modo molto veloce a tal punto che P non è più una proprietà di *equilibrio* per il vetro alla temperatura T' . Identifichiamo T_f con quella temperatura alla quale P è di nuovo in equilibrio (ovviamente T_f non è una proprietà fissa ma *dipende* dai cicli termici subiti).

core che per quelle multi-core soprattutto: in tal senso sono state studiate in modo esauriente e sviluppate fibre insensibili ad effetti di microcurvatura

Notiamo che il coefficiente di attenuazione dipende dall'assorbimento e dello scattering sia nel core che nel cladding: ogni modo guidato nel core ha una differente profondità di penetrazione nel cladding, per cui α è effettivamente *dipendente dal singolo modo* ed è generalmente più elevato per modi di ordine maggiore. Le fibre single-mode tipicamente hanno coefficienti di attenuazione molto minori, per questo motivo, di quelle multi-mode.

Per quanto riguarda la larghezza di banda, che determina il numero di bits di informazione trasmessi in un dato periodo di tempo, essa viene definita trattando la fibra ottica come un *sistema lineare* ove $P_{\text{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t')P_{\text{in}}(t') dt'$ con $h(t)$ risposta impulsiva del sistema. La trasformata di Fourier $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(2\pi ift) dt$ è la funzione di trasferimento che determina la risposta in frequenza, e la larghezza di banda $f_{3\text{dB}}$ è definita dalla relazione $\left| \frac{H(f_{3\text{dB}})}{H(0)} \right| = \frac{1}{2}$ ed è limitata dalla *dispersione* del segnale nella fibra. Un impulso temporale di luce ristretto che viaggia nella fibra ottica viene infatti “disperso” in un intervallo temporale più ampio, principalmente per 4 meccanismi:

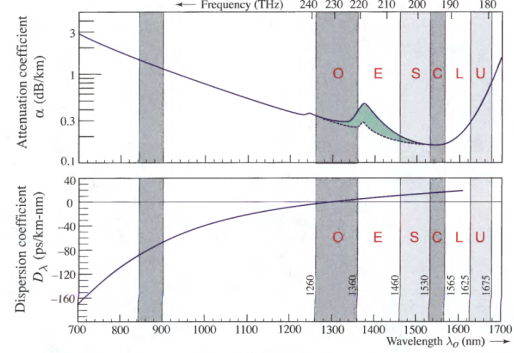


Figura 18: Dipendenza dalla lunghezza d'onda del coefficiente di attenuazione minimo α e del parametro di dispersione del materiale D ([57])

- (a) **Dispersione modale:** nelle fibre multi-mode i vari modi si propagano con velocità di gruppo differenti quando vengono eccitati nell'invio del segnale. Un singolo impulso di luce che entra in una fibra che supporta M modi a $z = 0$ si divide in M impulsi, legati ai singoli modi, il cui ritardo temporale differenziale aumenta durante la propagazione come funzione di z (asse della fibra). Se v_{min} e v_{max} sono la più bassa e la più alta velocità di gruppo, l'impulso ricevuto si allarga su un intervallo temporale $L \left(\frac{1}{v_{\text{min}}} - \frac{1}{v_{\text{max}}} \right)$, per cui utilizzando una stima FWHM su un impulso di forma triangolare possiamo stimare l'effetto di dispersione modale tramite $\Delta T = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{v_{\text{min}}} - \frac{1}{v_{\text{max}}} \right)$.
- (b) **Dispersione della velocità di gruppo (GVD):** se la lunghezza della fibra ottica è L , allora una specifica componente spettrale alla frequenza ω arriva con un ritardo di tempo $T = \frac{L}{v_g}$, ove $v_g = \left(\frac{dk_z}{d\omega} \right)^{-1}$ è la velocità di gruppo. Dato l'indice di rifrazione medio \bar{n} , utilizzando $k_z = \bar{n}k_0$ possiamo mostrare che $v_g = \frac{c}{\bar{n}_g}$, ove $\bar{n}_g = \bar{n} + \omega \left(\frac{d\bar{n}}{d\omega} \right)$ è l'indice di gruppo del modo. Le diverse componenti spettrali dell'impulso si disperdono, quindi, durante la propagazione e non arrivano simultaneamente alla fine della fibra: se ΔT è l'amplificazione dell'intervallo temporale, vale $\Delta T = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\lambda = DL\Delta\lambda$ ove $D = \left(\frac{1}{v_g} \right)' = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right)$ è detto *parametro di dispersione* e si misura in $\text{ps} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$. La grandezza $Y = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right)$ è invece detta GVD (“group-velocity dispersion”) e lega ΔT alla larghezza spettrale $\Delta\omega$ tramite $\Delta T = LY\Delta\omega$. In generale una misura della GVD risulta $D = D_M + D_W$, ove $D_M = \frac{1}{c} \frac{dn_{2,g}}{d\lambda}$ è la dispersione del materiale e $D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \left(\frac{n_{2,g}^2}{n_2\omega} V_0 \frac{d^2(V_0 k_z)}{dV_0^2} + \frac{dn_{2,g}}{d\omega} \frac{d(V_0 k_z)}{dV_0} \right)$ quella della guida d'onda⁷⁶.

⁷⁶ n_2 è l'indice del cladding, mentre $n_{2,g}$ è l'indice di gruppo relativo al cladding

La dispersione del materiale deriva dalla dipendenza dell'indice di rifrazione del silicio dalla frequenza ω : ad un livello più fondamentale possiamo attribuire questo comportamento alla presenza di frequenze di risonanza ω_j , e scrivere la formula di Sellmeier $n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^M \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}$, ove B_j sono le forze caratteristiche della risonanza e la sommatoria si estende a tutte le frequenze di risonanza nel range di frequenze di interesse. Visto che si può scrivere $D_M = \frac{1}{c} \frac{dn_g}{d\lambda}$, e che per il silicio puro $\frac{dn_g}{d\lambda} = 0$ per $\lambda_{ZD}^{\text{pure}} = 1.276\mu\text{m}$ (“zero-dispersion wavelength”)⁷⁷, allora nel range $1.25 - 1.66\mu\text{m}$ possiamo esprimere in forma empirica $D_M \simeq 1.22 \left(1 - \frac{\lambda_{ZD}}{\lambda}\right)$. Il contributo dovuto alla dispersione della guida d'onda D_W è negativo, come si vede dalla sua espressione analitica nell'intero range $0 - 1.6\mu\text{m}$, ma dipende dal parametro della fibra V_0 e dalla differenza degli indici di rifrazione normalizzata Δ . Infatti tale effetto di dispersione risulta dalla distribuzione della potenza ottica nel core e nel cladding ad una determinata λ : le velocità di fase nei due mezzi sono differenti, e quindi è alterata la velocità di gruppo complessiva v_g . D'altra parte come già osservato D_M è negativo per $\lambda < \lambda_{ZD}$ e positivo per $\lambda > \lambda_{ZD}$, quindi considerando il coefficiente complessivo D vi è uno spostamento della posizione in cui $D = 0$: la lunghezza d'onda corrispondente $\lambda_{ZD, \text{tot}}$ aumenta, anche se relativamente di poco perchè $|D_W| \ll |D_M|$. L'effetto combinato delle due dispersioni viene chiamato *dispersione cromatica* (figura 18), ed è la limitazione ultima delle performance delle single-mode fiber. Infatti generalmente si cerca di utilizzare profili per l'indice di rifrazione adeguati in modo che sia $\lambda \simeq \lambda_{ZD, \text{tot}}$, in modo da poter compensare gli effetti di dispersione: alcune di tali fibre sono le “dispersion-shifted fiber”, le “dispersion-flattened fiber” e le “dispersion-compensating fiber”.

- (c) Dispersione dei modi di polarizzazione(PMD): il fenomeno della birifrangenza, causato da possibili piccole deviazioni dalla perfetta simmetria cilindrica -ossia una sezione trasversale ellittica- e da variazioni casuali nell'indice di rifrazione, porta a un possibile fenomeno di dispersione dovuto ai diversi indici efficaci (e quindi diverse velocità di gruppo) associati alle componenti polarizzate ortogonalmente del modo fondamentale $\mathbf{HE}_{1,1}$ (che dovrebbero nel caso ideale essere degeneri). Nel caso di fibre con birifrangenza costante (tipo “polarization-maintaining fiber”) l'allargamento temporale dell'impulso può essere stimato a partire dal ritardo temporale ΔT tra due componenti di polarizzazione ortogonali lungo gli assi principali x e y , ossia $\Delta T = \left| \frac{L}{v_{g,x}} - \frac{L}{v_{g,y}} \right|$: in questo caso quindi $\frac{\Delta T}{L}$ è una misura della PMD. Per fibre convenzionali ove l'effetto è di natura sostanzialmente casuale gli stati di polarizzazione sono di natura ellittica e cambiano quindi in modo casuale lungo la fibra nella propagazione: con un semplice modello si divide la fibra in un numero elevato di segmenti, ove il grado di birifrangenza e l'orientazione degli assi principali rimane costante, e si tratta ogni segmento con il formalismo delle matrici di Jones \mathbf{T} , tenendo conto che l'intero processo è di natura statistica e che \mathbf{T} dipende dalla frequenza. In questo caso, se definiamo $\sigma_T^2 = \langle \Delta T^2 \rangle$, allora si trova $\sigma_T \simeq D_p \sqrt{L}$, ove D_p è un parametro che varia tra 0.01 e $10 \text{ ps km}^{-\frac{1}{2}}$ [57].
- (d) Dispersione per effetti non lineari: sono effetti di dispersione che intervengono quando l'intensità della luce nel core della fibra è sufficientemente elevata, visto che la dipendenza dell'indice di rifrazione dall'intensità diventa rilevante. Un primo effetto è l'automodulazione della fase (“self-phase modulation”, SPM): se un impulso otti-

⁷⁷per silicio non puro può variare nel range $1.27 - 1.29\mu\text{m}$

co è trasmesso nel mezzo, l'effetto Kerr causa un cambiamento della fase dipendente dal tempo secondo la variazione di intensità, anch'essa dipendente dal tempo. Quindi l'impulso acquista una frequenza *dipendente dal tempo* ("chirp"). Invece la modulazione incrociata della fase ("cross-phase modulation", XPM), connessa ancora all'effetto Kerr, è legata alla dipendenza della velocità di fase di un'onda ad una determinata frequenza dalle intensità delle onde ad altre frequenze nella propagazione dell'impulso. Entrambi gli effetti SPM e XPM sono legati ad una variazione dell'indice di rifrazione proporzionale all'intensità, con coefficienti differenti [27]. Un altro fenomeno non lineare di intermodulazione legato all'effetto Kerr è detto "four-wave mixing" (FWM). Questo accade quando ci sono almeno due differenti componenti in frequenza f_1 e $f_2 > f_1$ che si propagano insieme in un mezzo otticamente non lineare: vengono create componenti in frequenza aggiuntive a $f_3 = 2f_1 - f_2$ e $f_4 = 2f_2 - f_1$ per un effetto di interazione tra le componenti legato alla loro fase, che si manifesta in uno scambio di energia. Visto che le diverse componenti di un impulso ottico -legate a differenti intensità - viaggiano a differenti velocità di fase, allora in questi casi vi è una dispersione dell'impulso che può portare anche ad effetti di interferenza tra i modi differenti ("crosstalk"). Citiamo soltanto gli effetti di scattering stimolati anelastici di tipo Raman (SRS) e Brillouin (SBS), legati alle interazioni tra la luce e le vibrazioni acustiche o molecolari del mezzo, che possono portare anch'essi ad effetti di crosstalk. Nei sistemi con WDW lo studio di questi effetti risulta fondamentale.

4.4 Principi fisici di funzionamento della fibra a cristalli fotonici (PCF)

I cristalli fotonici possiedono generalmente una *simmetria traslazionale di tipo discreto*: sono invarianti sotto traslazioni multiple di una certa lunghezza fissata -costante del reticolo a , in una certa direzione $\hat{\mathbf{a}}$. Per la costante dielettrica vale quindi, utilizzando il principio di Neumann, $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r} \pm \mathbf{R})$, ove $\mathbf{R} = l\mathbf{a}$ con $l \in \mathbb{Z}$. Allora l'operatore $\hat{\Theta}$ introdotto in 51 commuta con tutti gli operatori nella forma $T_{\mathbf{R}}$, e possiamo classificare i modi di $\hat{\Theta}$ come autofunzioni simultanee, nella forma $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}$, dell'operatore $T_{\mathbf{R}}$ specificando $k_a := \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}$. Consideriamo il caso di un cristallo con simmetria discreta bidimensionale nel piano $x - y$ il cui reticolo è identificato dal vettore $\mathbf{a} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2$, con \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 vettori primitivi ortogonali della cella e $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Ora con il teorema di Bloch, per onde che si propagano nel piano $x - y$ si possono scrivere i modi nella forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_{\perp}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}} \exp(-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}) \quad (69)$$

con $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$, $\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ e $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}}$ funzione periodica dello stesso reticolo. I vettori \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , con intensità $k_1 := \frac{2\pi}{a_1} \sin(\theta)$ e $k_2 := \frac{2\pi}{a_2} \sin(\theta)$ ove $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}$ e direzione ortogonale ad \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 rispettivamente, definiscono il *reticolo reciproco*, e ogni valore di \mathbf{k}_{\perp} all'interno della zona di Brillouin identifica un autostato di $\hat{\Theta}$ con frequenza $\omega(\mathbf{k}_{\perp})$ e autovettori 69. I punti del reticolo reciproco sono corrispondenti alla trasformata di Fourier 2D della funzione periodica che identifica il reticolo diretto. Osserviamo che \mathbf{k}_{\perp} è una quantità conservata in questo tipo di reticolo discreto, modulo l'addizione di vettori del reticolo reciproco nella forma $\mathbf{G} = l_1\mathbf{k}_1 + l_2\mathbf{k}_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, perchè tale operazione non cambia nè l'autostato nè la direzione di propagazione. Dalla master equation, sostituendo i modi di Bloch 71, otteniamo

$$\hat{\Theta}_{\mathbf{k}_{\perp}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}} \quad (70)$$

ove $\hat{\Theta}_{\mathbf{k}_{\perp}} := (i\mathbf{k}_{\perp} + \nabla) \times \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} (i\mathbf{k}_{\perp} + \nabla) \times$ è il nuovo operatore hermitiano definito in questo caso. La funzione \mathbf{u} , ossia i profili dei modi, è determinata dall'equazione agli autovalori 70

ed è soggetta alla condizione di trasversalità $(i\mathbf{k}_\perp + \nabla) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}_\perp} = 0$ e alla periodicità $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{r})$. Vista la condizione di periodicità, allora possiamo restringere il problema agli autovalori ad una singola cella del reticolo: matematicamente questo porta ad uno *spettro discreto* degli autovalori [62]. Per ogni valore di \mathbf{k}_\perp possiamo quindi trovare un infinito set (una famiglia) di modi con frequenze discrete $\omega_n(\mathbf{k})$, che possiamo etichettare con un indice di banda n e che dipendono in modo continuo da \mathbf{k}_\perp . La simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell porta alla relazione $\omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(-\mathbf{k})$. Inoltre si può mostrare che se un cristallo fotonico ha ulteriori simmetrie di rotazione, riflessione o inversione (*gruppo puntuale*), allora $\omega(\mathbf{k})$ possiede le stesse simmetrie⁷⁸. La più piccola regione nella zona di Brillouin ove $\omega(\mathbf{k})$ non è legata da simmetrie si dice *zona di Brillouin irriducibile*.

Veniamo ora all'analisi dei modi permessi. Accade nei cristalli fotonici che vi sono bande di frequenze ω ove non si può propagare nessuno modo, a prescindere da \mathbf{k} : queste sono dette *bande proibite*, o "photonic bandgaps" (PBG)⁷⁹. La ragione fisica profonda dell'esistenza di queste bande si può capire considerando gli stati immediatamente sopra e sotto al gap nel grafico $\omega(\mathbf{k})$: i modi a basse frequenze concentrano la loro energia nelle regioni con $\epsilon(\mathbf{r})$ elevato, mentre i modi ad alte frequenze concentrano la loro energia nelle regioni con $\epsilon(\mathbf{r})$ ridotto. Se consideriamo onde di Bloch che viaggiano ad un angolo rispetto al piano $x - y$, allora 69 diventa in questo caso

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}_\perp} \exp(-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp(-ik_z z) \quad (71)$$

ove k_z è una costante, e la struttura a bande prende la forma di un insieme di superfici nella forma $\omega(\mathbf{k}_\perp, k_z)$. Solo nel caso $k_z = 0$ può esistere una *banda proibita completa*: questa è una conseguenza dell'omogeneità del cristallo nella direzione z , sostanzialmente perchè non vi sono fenomeni di scattering lungo tale direzione dell'onda di Bloch incidente⁸⁰. I modi con $k_z = 0$ sono infatti molto speciali, e la simmetria per inversione attraverso il piano $x - y$ permette di classificare i modi separandoli per due distinte polarizzazioni, in particolare dette TE' ($E_z = 0$ e $\mathbf{H}_\perp = 0$) e TM' ($H_z = 0$ e $\mathbf{E}_\perp = 0$). Si trova che i bandgap di tipo TM' sono favoriti per reticolo con regioni con $\epsilon(\mathbf{r})$ elevato, quelli di tipo TE' sono favoriti per reticoli connessi [62]. Allora una geometria come in figura 19 permette di avere un *bandgap completo* nel caso generale in cui sono presenti entrambe le polarizzazioni TE' e TM', e questo risulta il cuore del funzionamento della fibra a cristalli fotonici. Per giunta in tali fibre PCF gli effetti di non linearità vengono ridotti rispetto alle fibre convenzionali: essendo tali effetti un limite ultimo -intrinseco- alla capacità di trasmissione per le fibre, le PCF rappresentano potenzialmente il futuro della comunicazione in fibra ottica.

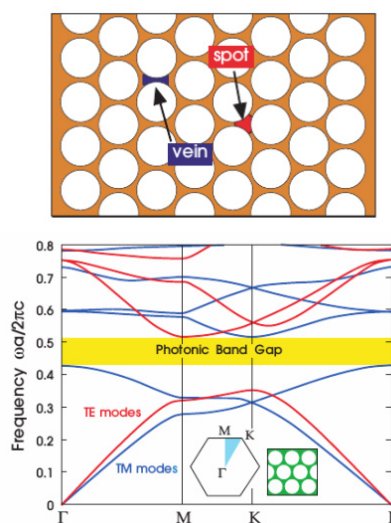


Figura 19: Bandgap fotonico completo per una struttura 2D formata da un reticolo di tipo triangolare con fori d'aria immersi in un substrato dielettrico con $\epsilon(\mathbf{r})$ elevata ([64])

⁷⁸la dimostrazione si basa sempre sulla commutatività di $\hat{\Theta}_{\mathbf{k}_\perp}$ e dell'operatore relativo alla simmetria

⁷⁹ove quindi si propagano modi evanescenti o radiativi

⁸⁰infatti servono fenomeni di scattering multipli tra regioni con differente costante dielettrica per fornire una banda proibita

5 Modellizzazione e simulazione della propagazione di modi in fibra ottica

Utilizzando i software COMSOL e MATLAB è stato modellizzato il problema dell'analisi modale per alcune geometrie di fibra ottica introdotte nella sezione 4, ossia nello specifico SCF, RCF e PCF in figura 20. Il primo software è dedicato alla risoluzione, con il metodo agli *elementi finiti*, dell'equazione di Helmholtz nella forma vettoriale 52 per le geometrie bidimensionali semplificate proposte e al confronto dei risultati *numerici* ottenuti con quanto già discusso dal punto di vista teorico. Il secondo software è un ambiente per il calcolo numerico avanzato, che nel nostro caso ci permette di trovare, a partire dalla soluzione analitica delle fibre con geometria SCF e RCF [64], le *condizioni di cutoff* dei singoli modi, ricercando in modo iterativo gli zeri delle espressioni riportati nelle tabelle 1 e 2. Assumiamo nel seguito una lunghezza d'onda caratteristica *fissata* $\lambda = 1.55\mu\text{m}$, che corrisponde, come già osservato in precedenza, al centro della finestra di trasmissione ove vi è la minor attenuazione.

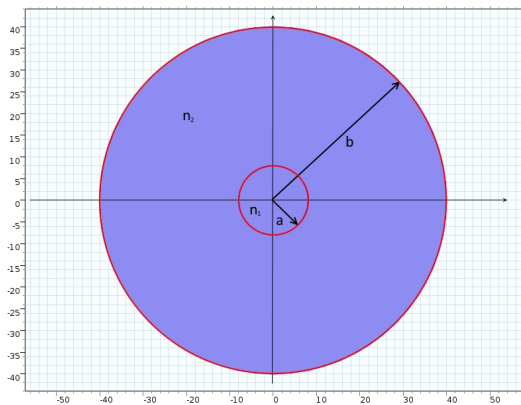
5.1 Risultati dei modelli COMSOL

È stato utilizzato il modulo *Electromagnetic Waves* con le specifiche *Frequency Domain (emw)* e *Mode analysis* di COMSOL versione 5.0 per queste simulazioni. Le geometrie SCF 21a, RCF 21b e PCF 21c sono state scelte appositamente con *dimensioni confrontabili*, e con parametri tipici di quelle generalmente utilizzate. Infatti il parametro V_0 scelto è *uguale* per entrambe le geometrie SCF e RCF, in modo da rendere i risultati meglio confrontabili anche con le soluzioni analitiche e con il calcolo dei cutoff successivo. Per quanto riguarda la PCF, è stata scelta una struttura periodica di tipo esagonale *molto fitta* per questioni di tipo computazionale [61]: il software altrimenti trova una quantità elevata di modi *non guidati* e con relativa intensità dei campi *estremamente bassa*, per giunta concentrata su zone lontane dal "core" solido centrale e privi di interesse. Questo accade perchè a modi di ordine sempre più elevato è associata una lunghezza d'onda efficace nel piano trasversale $\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{k_{\perp}}$ sempre più ridotta, e quindi se $\frac{d}{\lambda}$ è molto minore di 1 la distribuzione in intensità di tali modi può estendersi al di fuori del "core" centrale. I valori degli indici di rifrazione per le fibre SCF e RCF sono stati scelti molto simili ($n_{\text{Doped silica glass}} = 1.4378$ e $n_{\text{Silica glass}} = 1.4457$, valori caratteristici per il vetro siliceo in forma pura o con dopanti), in modo che $\Delta \ll 1$ -ossia le fibre siano "debolmente guidate"- e siano supportati solo relativamente pochi (una decina circa) modi guidati nella fibra. Per quanto riguarda le PCF ovviamente l'indice di rifrazione dell'aria per i fori è $n_{\text{air}} = 1$. L'utilizzo delle condizioni di cutoff ricavate numericamente nel seguito per i singoli modi permette quindi anche di fare una previsione del numero di modi supportati nella propagazione, dati i parametri iniziali della geometria fisica 20. La mesh è stata scelta di tipo trapezoidale, con circa 10^6 elementi, per ottenere un risultato numerico migliore anche nel caso di pattern in cui era previsto $E_z = 0$ o $H_z = 0$ come i modi TE e TM rispettivamente. Le condizioni di continuità dei campi vengono imposte dal software nel confine tra i dielettrici presi in considerazione, e per assorbire le onde EM incidenti ai bordi esterni del cladding, simulando un'estensione infinita del sistema, è stato usato un *perfectly matched layer (PML)*.

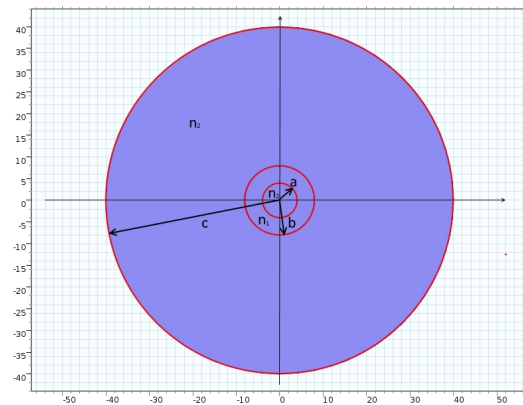
Nelle seguenti immagini riportate, con una approfondita didascalia, sono rappresentati in forma visiva i campi **E** e **H**, evidenziando con una *scala a colori* relativa alla superficie l'intensità della componente z (lungo l'asse della fibra) del campo e mediante una *mappa di frecce* con lunghezza proporzionale alle intensità delle componenti dei campi nella sezione trasversale e direzione determinata dalle componenti stesse. La raffigurazione visiva

aiuta a riconoscere i “pattern” caratteristici dei singoli modi, sia tramite il numero di nodi radiali e azimutali, sia tramite il tipo di distribuzione stessa dei campi che dal valore stesso dell'indice efficace associato. E' stata evidenziata nelle figure solo la parte centrale della fibra ottica, ove avviene effettivamente la propagazione. La classificazione dei modi è stata effettuata seguendo l'analisi teorica della sezione 4, ove possibile.

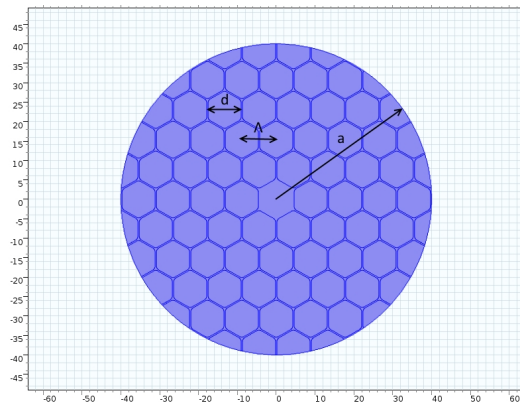
Figura 20: Geometrie fisiche classiche 2D delle fibre ottiche



(a) Geometria step-index fiber (SCF) 2D: raggio del core $a = 8\mu\text{m}$, raggio del cladding $b = 40\mu\text{m}$, indice di rifrazione del core $n_1 = n_{\text{Silica glass}} = 1.4457$ e indice di rifrazione del cladding $n_2 = n_{\text{Doped silica glass}} = 1.4378$. Il parametro caratteristico risulta $V_0 \simeq 4.895$.

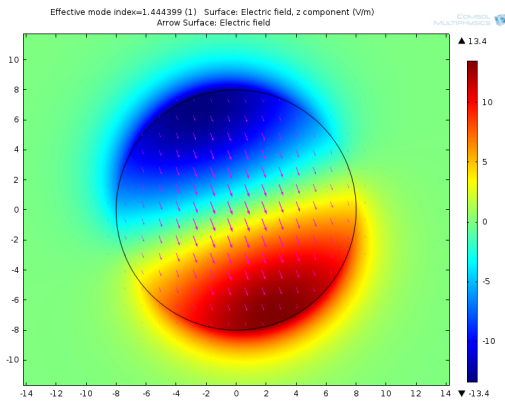


(b) Geometria ring-core fiber (RCF) 2D: raggio interno dell'anello (core) $a = 4\mu\text{m}$, raggio esterno dell'anello (core) $b = 8\mu\text{m}$, raggio del cladding esterno $c = 40\mu\text{m}$, indice di rifrazione del core $n_1 = n_{\text{Silica glass}} = 1.4457$ e indice di rifrazione del cladding $n_2 = n_{\text{Doped silica glass}} = 1.4378$. I parametri caratteristici risultano $V_0 \simeq 4.895$ e $\rho = 0.5$.

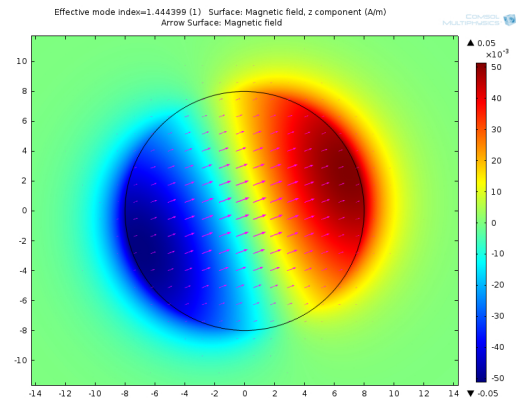


(c) Geometria (solid-core) photonic-crystal fiber (PCF) 2D: diametro di ogni foro d'aria $d = 5\mu\text{m}$, dimensione del pitch $\Lambda = 10.5\mu\text{m}$, raggio del cladding esterno $b = 40\mu\text{m}$, indice di rifrazione dell'aria $n_1 = n_{\text{Air}} \simeq 1$ e indice di rifrazione della struttura esterna $n_2 = n_{\text{Silica glass}} = 1.4457$. La struttura geometrica dei fori è *esagonale*, e la tassellatura uniforme nell'intera sezione trasversale.

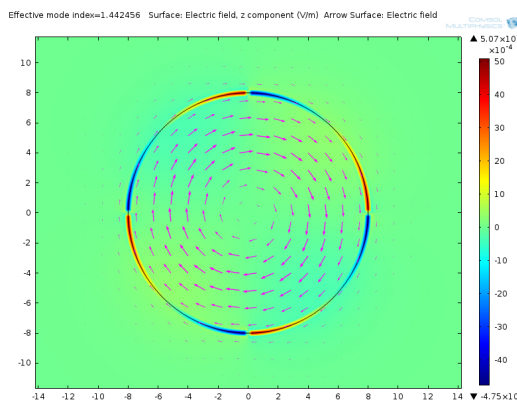
Figura 21: Rappresentazioni dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} associati alla geometria SCF



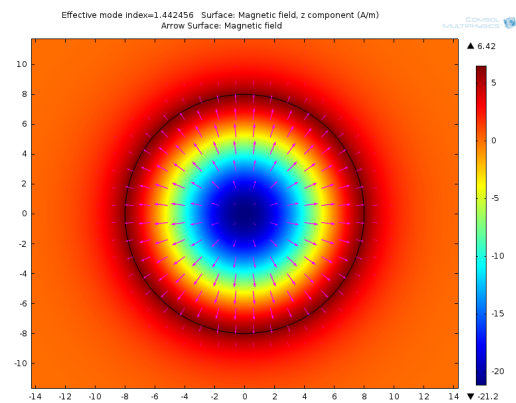
(a) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.444399$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 13.4 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -13.4 \text{ V m}^{-1}$.



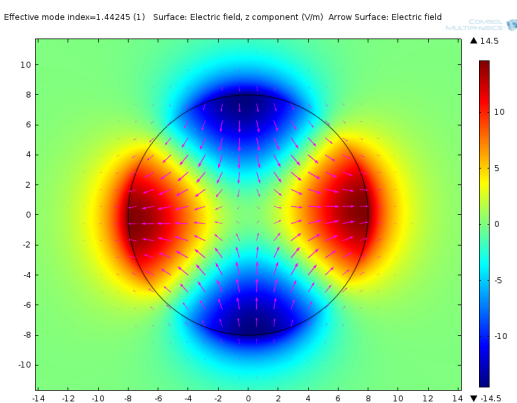
(b) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.444399$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$.



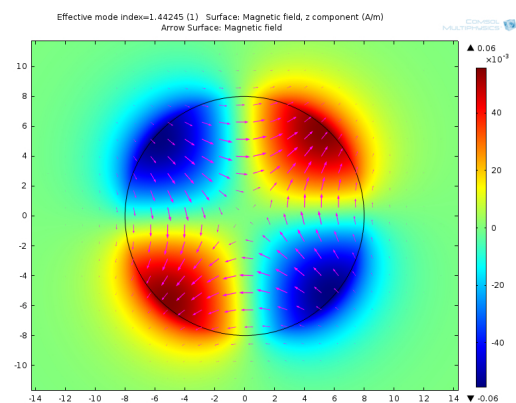
(c) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero $\mathbf{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.442456$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 5.07 \cdot 10^{-7} \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -4.75 \cdot 10^{-7} \text{ V m}^{-1}$.



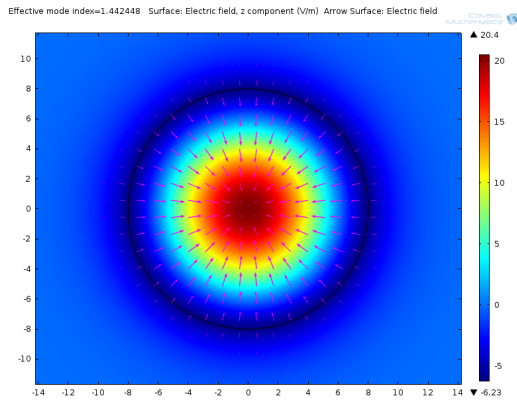
(d) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero $\mathbf{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.442456$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 6.42 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -21.2 \cdot 10^{-7} \text{ A m}^{-1}$.



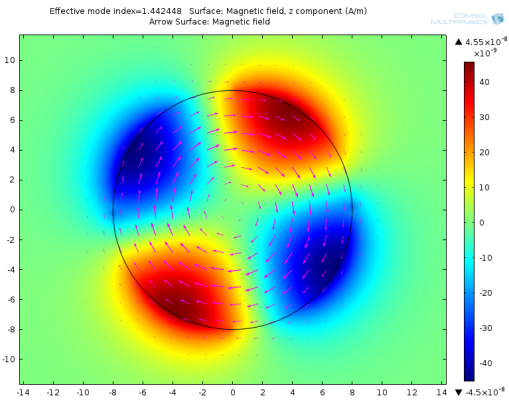
(e) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\mathbf{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.44245$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 14.5 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -14.5 \text{ V m}^{-1}$.



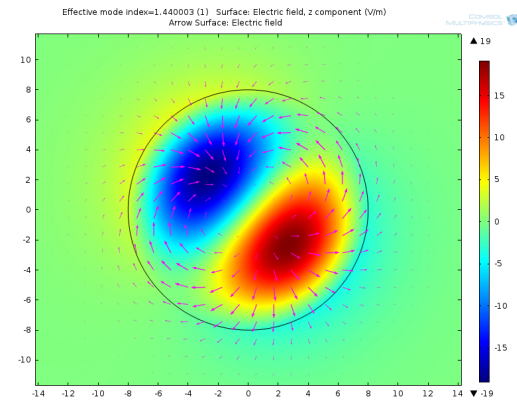
(f) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\mathbf{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.44245$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$.



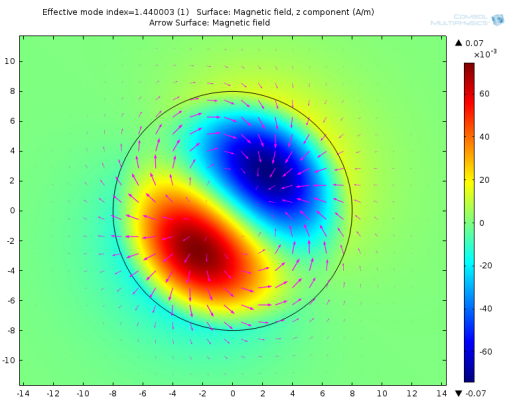
(g) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero $\text{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.442448$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 20.4 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -6.23 \text{ V m}^{-1}$.



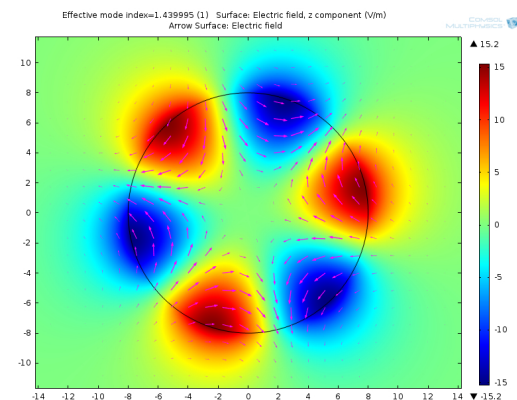
(h) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero $\text{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.442448$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 4.55 \cdot 10^{-9} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -4.55 \cdot 10^{-9} \text{ A m}^{-1}$.



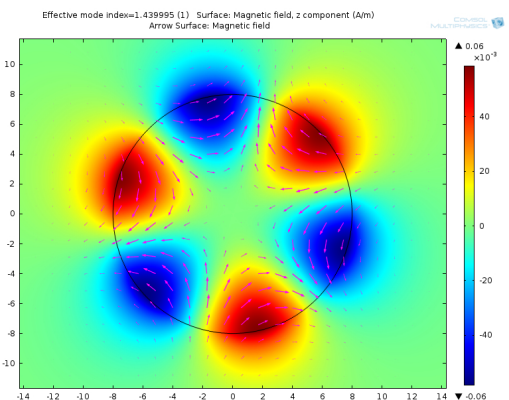
(i) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\text{EH}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.440003$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 19 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -19 \text{ V m}^{-1}$.



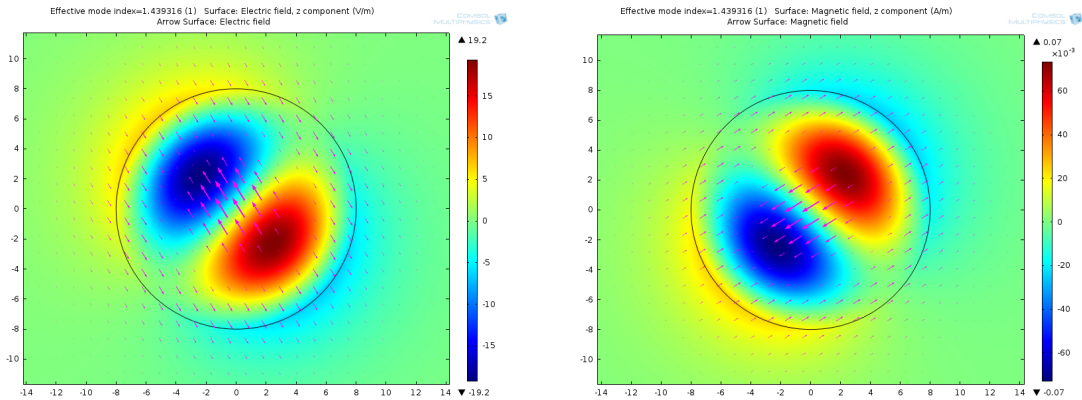
(j) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\text{EH}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.440003$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -7 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$.



(k) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\text{HE}_{3,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.439995$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 15.2 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -15.2 \text{ V m}^{-1}$.



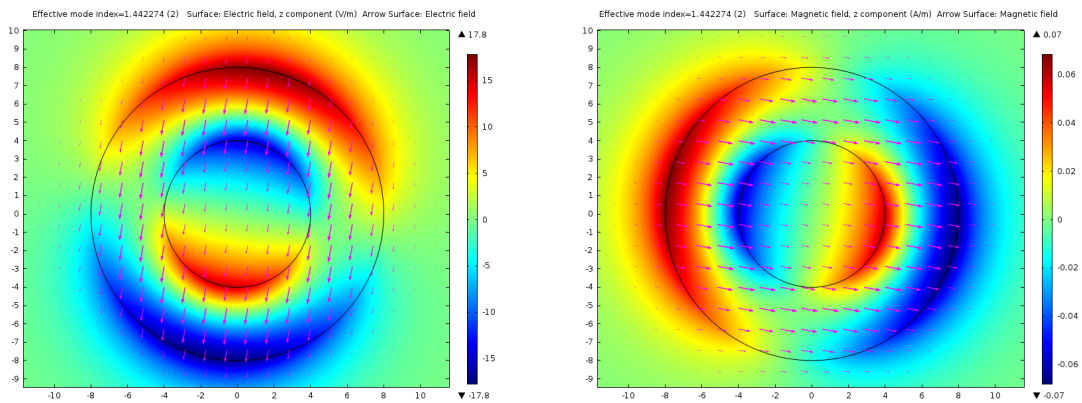
(l) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\text{HE}_{3,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.439995$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$.



(m) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\mathbf{HE}_{1,2}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.439316$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 19.2 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -19.2 \text{ V m}^{-1}$.

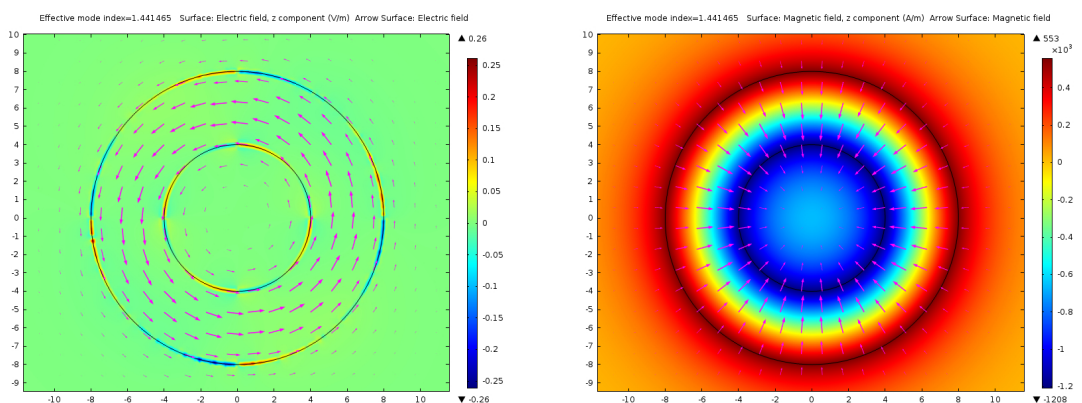
(n) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\mathbf{HE}_{1,2}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.439316$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -7 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-1}$.

Figura 22: Rappresentazioni dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} associati alla geometria RCF



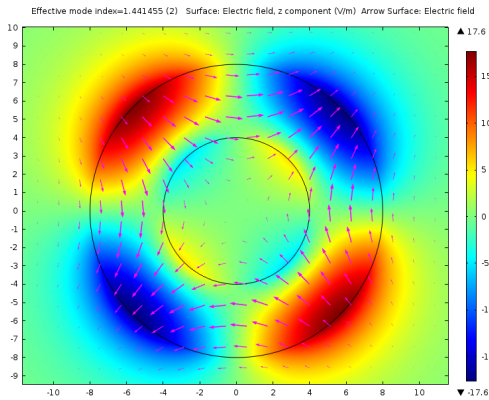
(a) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.442274$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 17.8 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -17.8 \text{ V m}^{-1}$.

(b) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.442274$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 0.07 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -0.07 \text{ A m}^{-1}$.

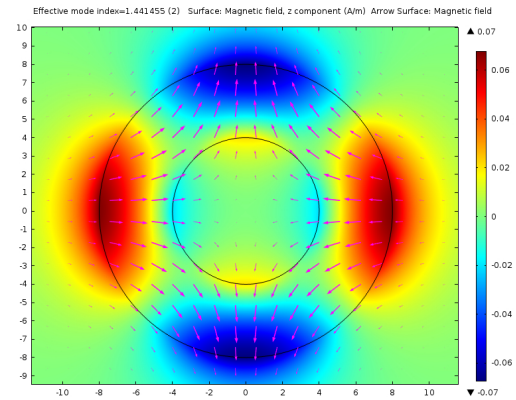


(c) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero $\mathbf{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.441465$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 0.26 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -0.26 \text{ V m}^{-1}$.

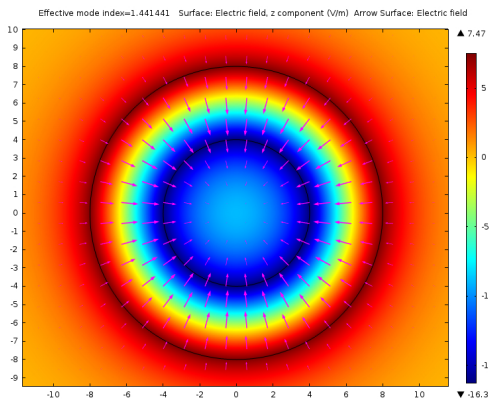
(d) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero $\mathbf{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.441465$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 5.53 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -1.208 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-1}$.



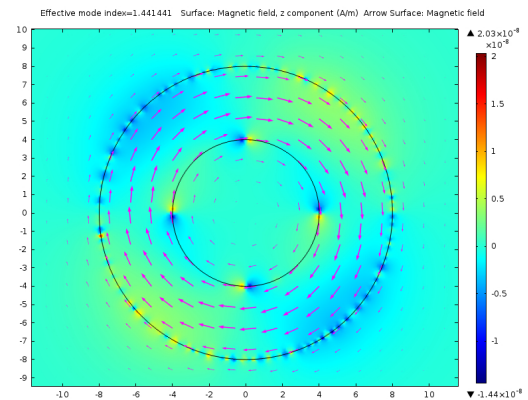
(e) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\mathbf{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.441455$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 17.6 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -17.6 \text{ V m}^{-1}$.



(f) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\mathbf{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.441455$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 0.07 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -0.07 \text{ A m}^{-1}$.

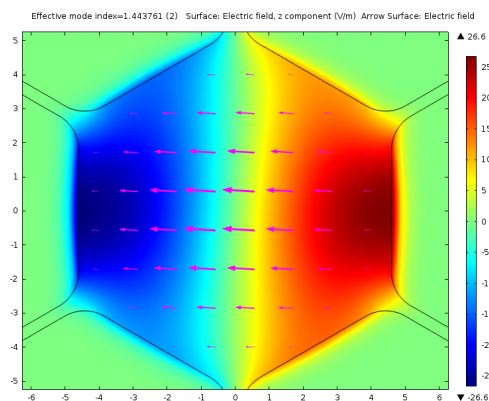


(g) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero $\mathbf{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.441441$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 7.47 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -16.3 \text{ V m}^{-1}$.

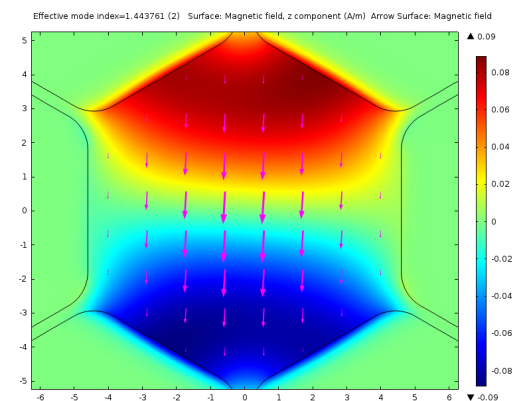


(h) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero $\mathbf{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.441441$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 2.03 \cdot 10^{-16} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -1.44 \cdot 10^{-16} \text{ A m}^{-1}$.

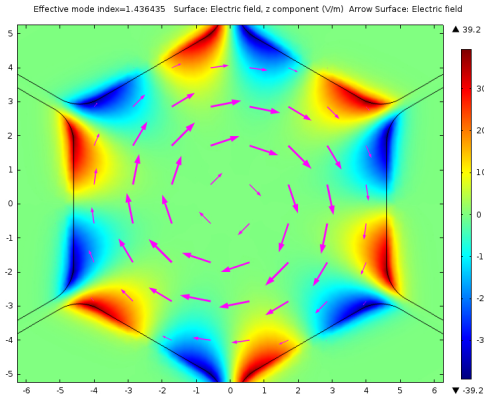
Figura 23: Rappresentazioni dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} associati alla geometria PCF



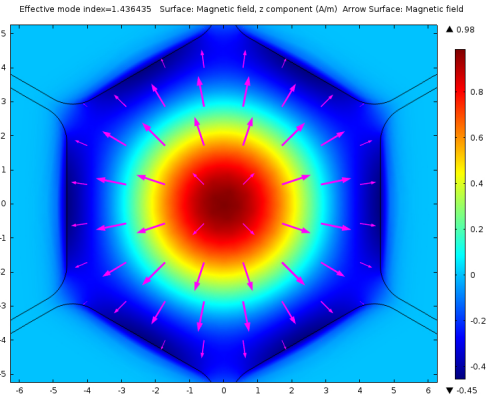
(a) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.443761$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 26.6 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -26.6 \text{ V m}^{-1}$.



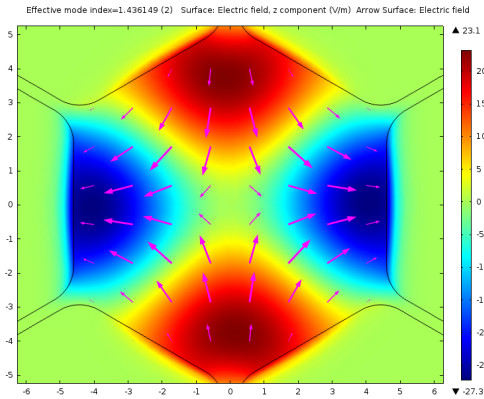
(b) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo fondamentale degenero $\mathbf{HE}_{1,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.443761$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 0.09 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -0.09 \text{ A m}^{-1}$.



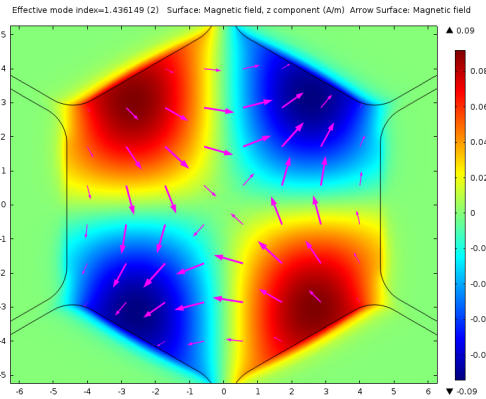
(c) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero quasi- $\text{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.436435$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 39.2 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -39.2 \text{ V m}^{-1}$.



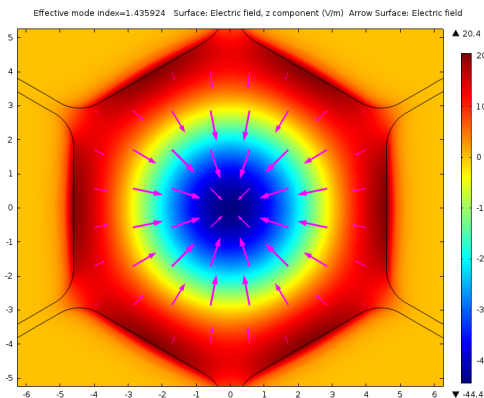
(d) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero quasi- $\text{TE}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.436435$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 0.98 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -0.45 \text{ A m}^{-1}$.



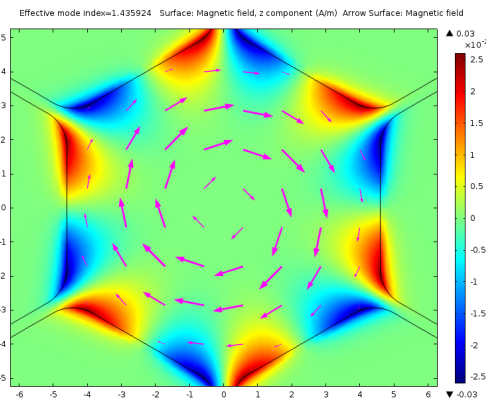
(e) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo degenero $\text{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.436149$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 23.1 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -27.3 \text{ V m}^{-1}$.



(f) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo degenero $\text{HE}_{2,1}$ (2 stati di polarizzazione ortogonali) con $n_{\text{eff}} = 1.436149$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 0.09 \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -0.09 \text{ A m}^{-1}$.



(g) Rappresentazione del campo \mathbf{E} del modo non degenero quasi- $\text{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.435924$. Nella scala a colori $E_{\text{max}} = 20.4 \text{ V m}^{-1}$ ed $E_{\text{min}} = -44.4 \text{ V m}^{-1}$.



(h) Rappresentazione del campo \mathbf{H} del modo non degenero quasi- $\text{TM}_{0,1}$ con $n_{\text{eff}} = 1.435924$. Nella scala a colori $H_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ A m}^{-1}$ ed $H_{\text{min}} = -3 \cdot 10^{-4} \text{ A m}^{-1}$.

Nella tabella seguente sono stati raccolti in forma di elenco i valori degli indici efficaci trovati seguendo l'analisi modale effettuata. La classificazione dei modi è standard per le geometrie SCF e RCF, e in tabella 3 sono in effetti riportati tutti gli indici efficaci legati alla propagazione dei modi nelle suddette geometrie. E' doveroso osservare la presenza di *errori numerici* nel caso dei modi $\mathbf{TE}_{0,1}$ e $\mathbf{TM}_{0,1}$ rappresentati nelle figure 22c21g per la geometria SCF e 23c22g per la geometria RCF: le componenti E_z e H_z rispettivamente dovrebbero infatti essere nulle. Tuttavia possiamo notare dalle descrizioni che i valori relativi delle componenti E_z e H_z sono spesso *molti ordini di grandezza minori* ($\sim 10^{-3} - 10^{-12}$) rispetto ai corrispettivi degli altri modi della stessa geometria, per cui effettivamente l'effetto risulta poco influente nel confronto con il risultato analitico esatto $E_z = 0$ ($\mathbf{TE}_{0,1}$) e $H_z = 0$ ($\mathbf{TM}_{0,1}$). Inoltre il "pattern" caratteristico rivela una struttura davvero molto simile a quella dei modi $\mathbf{HE}_{2,1}$, con 4 nodi azimutali a distanze angolari di $\phi = \frac{\pi}{2}$ l'uno dall'altro, come si può osservare direttamente dalle 22c21g23c22g. L'effetto, che possiamo ribattezzare con "numerical coupling", è probabilmente dovuto al fatto che gli indici di rifrazione efficaci del gruppo modale corrispondente $\mathbf{TE}_{0,1}$, $\mathbf{HE}_{2,1}$ e $\mathbf{TM}_{0,1}$ sono molto vicini in termini relativi, come si vede dalla tabella 3. Infatti spesso nel caso di metodi numerici, per trovare gli autostati di un sistema -ossia i modi, nel nostro caso- lo si eccita fino a trovare una condizione stazionaria: ma se gli autovalori -gli indici efficaci- sono relativamente molto vicini allora si può eccitare anche un modo adiacente, per via dell'indeterminazione intrinseca su ogni calcolo numerico dovuta alla precisione della macchina. Si nota anche che la presenza degli errori numerici è relegata, in quasi tutti i casi, nel confine tra i due dielettrici con indici n_1 e n_2 : quindi probabilmente anche la necessità dei campi di soddisfare le condizioni al contorno su una linea geometrica di spessore infinitesimo può aver concorso al problema. Simulazioni con mesh sempre più fini hanno mostrato in generale un'attenuazione sempre più vistosa dell'effetto, come atteso.

Mode	Geometria SCF	Geometria RCF	Mode	Geometria PCF
$\mathbf{HE}_{1,1}$	1.444399	1.442274	$\mathbf{HE}_{1,1}$	1.443761
$\mathbf{TE}_{0,1}$	1.442456	1.441465	$\mathbf{TE}_{0,1}^{\text{like}}$	1.436435
$\mathbf{HE}_{2,1}$	1.44245	1.441455	$\mathbf{HE}_{2,1}$	1.436149
$\mathbf{TM}_{0,1}$	1.442448	1.441441	$\mathbf{TM}_{0,1}^{\text{like}}$	1.435924
$\mathbf{EH}_{1,1}$	1.440003	1.439593	$\mathbf{HE}_{3,1}^{\text{a}}$	1.426428
$\mathbf{HE}_{3,1}$	1.439995	1.439591	$\mathbf{EH}_{1,1}$	1.425924
$\mathbf{HE}_{1,2}$	1.439316	—	$\mathbf{HE}_{3,1}^{\text{b}}$	1.425889

Tabella 3: Questa tabella riassume i valori degli indici efficaci trovati da COMSOL per le geometrie 21a21b21c

Notiamo che la descrizione teorica dei modi legata alle soluzioni analitiche precedentemente esaminate è *coerente* con i risultati numerici del software COMSOL, e ha permesso di riconoscere ogni singolo modo con certezza sia dall'indice efficace associato che dalla distribuzione dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} . Invece per le PCF è possibile un'analisi solo parziale, essendo la classificazione dei modi *dipendente* dall'effettiva geometria scelta (parametri d e Λ e tipo di struttura periodica) in modo determinante. Dato il numero praticamente infinito di geometrie, solo una classificazione *parziale* e legata alle analogie con le fibre classiche può essere possibile [70]. In particolare accade anche che "pattern" caratteristici associati prima a modi degeneri (es. $\mathbf{HE}_{3,1}$) vengano ora associati a modi *non degeneri* (es. $\mathbf{HE}_{3,1}^{\text{a}}$ e $\mathbf{HE}_{3,1}^{\text{b}}$), e che i tipici "pattern" dei modi $\mathbf{TE}_{0,1}$ e $\mathbf{TM}_{0,1}$ delle geometrie SCF e RCF vengano stavolta associati a modi quasi- $\mathbf{TE}_{0,1}$ e quasi- $\mathbf{TM}_{0,1}$, ove H_z ed E_z possono raggiungere

valori molto elevati. In tabella 3 sono stati quindi riportati soltanto i valori degli indici efficaci dei primi 7 modi, per confronto con le altre geometrie SCF/RCF.

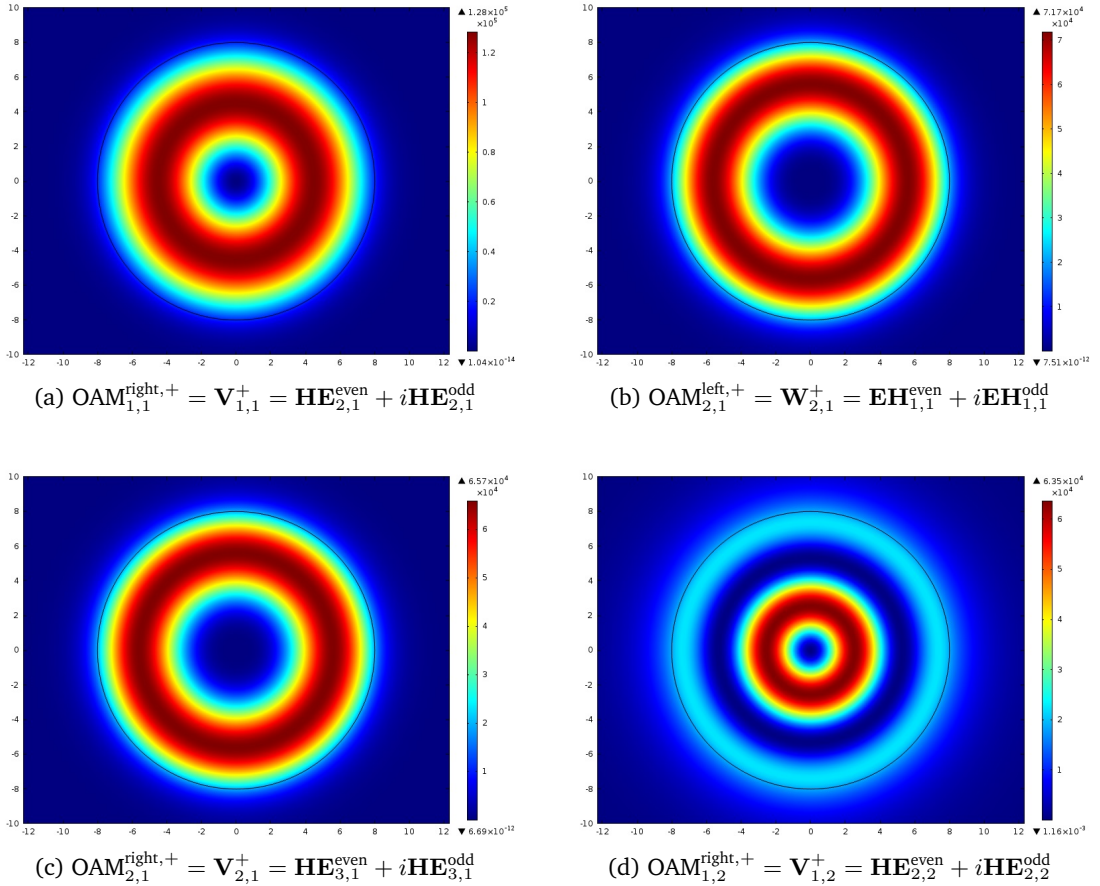
5.2 Rappresentazione dei modi OAM

Utilizzando le formule sviluppate nella sezione 4, con le distribuzioni dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} ottenute per i modi delle geometrie SCF e RCF nelle simulazioni COMSOL possiamo costruire i profili di intensità degli stati OAM. In particolare sono stati scelti in questo caso i modi $\mathbf{HE}_{2,1}$, $\mathbf{EH}_{1,1}$, $\mathbf{HE}_{3,1}$ e $\mathbf{HE}_{2,2}$ relativi alla geometria SCF per semplicità (in figura 22e21i21k), e sono state applicate le equazioni 68 e 67. In generale, scrivendo il campo $\mathbf{E}^{\text{even/odd}}$ dei due modi degeneri nella forma $\Re(\mathbf{E}^{\text{even/odd}}) + i\Im(\mathbf{E}^{\text{even/odd}})$, risulta che il profilo di intensità I è proporzionale a $\mathbf{E}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}_{\text{tot}}^* = (\mathbf{E}^{\text{odd}} + i\mathbf{E}^{\text{odd}}) \cdot (\mathbf{E}^{\text{even}} + i\mathbf{E}^{\text{even}})^*$. Tralasciando alcuni semplici passaggi si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}_{\text{tot}}^* &= |\Re(\mathbf{E}^{\text{even}})|^2 + |\Re(\mathbf{E}^{\text{odd}})|^2 + |\Im(\mathbf{E}^{\text{even}})|^2 + |\Im(\mathbf{E}^{\text{odd}})|^2 \\ &\quad - 2 \left[\Re(E_x^{\text{even}})\Im(E_x^{\text{odd}}) + \Re(E_y^{\text{even}})\Im(E_y^{\text{odd}}) + \Re(E_z^{\text{even}})\Im(E_z^{\text{odd}}) \right] \\ &\quad + 2 \left[\Im(E_x^{\text{even}})\Re(E_x^{\text{odd}}) + \Im(E_y^{\text{even}})\Re(E_y^{\text{odd}}) + \Im(E_z^{\text{even}})\Re(E_z^{\text{odd}}) \right] \end{aligned} \quad (72)$$

che risulta l'equazione implementata nel software di simulazione COMSOL per ottenere i profili di intensità degli stati OAM.

Figura 24: Profili di intensità per i modi OAM costruiti con i modi $\mathbf{HE}_{2,1}$, $\mathbf{EH}_{1,1}$, $\mathbf{HE}_{3,1}$ e $\mathbf{HE}_{2,2}$



Ricordando la famiglia OAM di tipo (ν, m) costituita da $\mathbf{V}_{\nu, m}^{\pm}$ e $\mathbf{W}_{\nu, m}^{\pm}$, rinomiamo questi stati rispettivamente come $\text{OAM}_{\nu, m}^{+, \text{right}}$ / $\text{OAM}_{\nu, m}^{-, \text{left}}$ e $\text{OAM}_{\nu, m}^{+, \text{left}}$ / $\text{OAM}_{\nu, m}^{-, \text{right}}$ evidenziando l'orientazione associata al fronte d'onda elicoidale "left"/"right" e il tipo di polarizzazione circolare destra/sinistra (+/-). A livello generale, ricordiamo che il modo fondamentale $\mathbf{HE}_{1,1}$ è sempre presente per le geometrie SCF e RCF, ma lo stato associato nella base OAM non si può propriamente definire uno stato OAM, visto che non trasporta momento angolare orbitale ($\nu = 0$). I primi modi $\text{OAM}_{1,1}^{\text{left/right}}$ sono basati sul modo vettoriale $\mathbf{HE}_{2,1}$; successivamente vi sono i modi $\text{OAM}_{2,1}^{\text{left/right}}$ composti rispettivamente dai modi vettoriali $\mathbf{HE}_{3,1}$ ed $\mathbf{EH}_{1,1}$. Per quanto riguarda la capacità di trasporto di informazioni per una fibra, generalmente esso è determinato dalla combinazione dell'OAM multiplexing e del polarization-division multiplexing.

Il modo fondamentale $\mathbf{HE}_{1,1}$ può supportare i due stati di polarizzazione +/-, per cui è legato solo al PDM. Invece con i modi $\text{OAM}_{\nu, m}^{\text{left/right}, +/-}$ propri sono legati sia al PDM che all'OAM multiplexing. Essi costituiscono stati di polarizzazione circolare destra/sinistra (SAM $\pm \hbar$): i primi modi $\text{OAM}_{\pm 1,1}^{\text{left, right}}$ possono avere uno stato di polarizzazione circolare ciascuno ($\text{OAM}_{\pm 1,1}^{\text{right}, +}$ e $\text{OAM}_{\pm 1,1}^{\text{left}, -}$), mentre i modi $\text{OAM}_{\pm 2,1}^{\text{left, right}}$ e tutti quelli di ordine più elevato possono avere entrambi gli stati di polarizzazione circolare destra e sinistra ($\text{OAM}_{\pm 1,1}^{\text{right}, +/-}$ e $\text{OAM}_{\pm 1,1}^{\text{left}, +/-}$) [68] [71]. È importante tenere presente queste considerazioni per quanto riguarda il numero di stati OAM supportati e la loro degenerazione.

Nel nostro caso i profili di intensità degli stati $\text{OAM}_{\nu, m}$ con $\nu \geq 1$ sono di forma anulare, con una dimensione che aumenta gradualmente con l'ordine ν del modo OAM, come si vede dalle figure 25a e 25c ad esempio. Gli stati $\text{OAM } \mathbf{V}_{1,1}^+$ e $\mathbf{V}_{1,2}^+$ presentano una carica topologica pari a 1 ($\nu = 1$), mentre $\mathbf{V}_{2,1}^+$ e $\mathbf{W}_{2,1}^+$ presentano una carica topologica pari a 2 ($\nu = 2$); eccetto $\mathbf{V}_{1,2}^+$ individuato dall'indice $m = 2$ poi tutti gli stati hanno $m = 1$ [72]. Ricordiamo che, in analogia ai modi LG nel caso di fasci parassiali, m rappresenta anche il numero di anelli nella distribuzione in intensità dei modi OAM come si può notare dalle figure 25a e 25d.

5.3 Soluzione delle condizioni di cutoff dei modi per le geometrie SCF e RCF

A partire dalle espressioni analitiche presentate nella sezione 4, riportate anche da Brunet et al. [64], è stata implementata su MATLAB versione 2015 la risoluzione numerica di tali equazioni per le geometrie SCF 2 e RCF 1. Il metodo di ricerca di tali zeri è stato costruito in modo *ricorsivo*, in modo da trovare la soluzione con l'indice m desiderato. Il contrasto degli indici di rifrazione n_0^2 è ovviamente il rapporto $\left(\frac{n_{\text{Silica Glass}}}{n_{\text{Doped Silica Glass}}}\right)^2 \simeq 1.011$. È stato effettuato preliminarmente un confronto numerico con i risultati riportati da Brunet et al. [64] per verificare il funzionamento del programma implementato, con esito positivo. I risultati relativi al caso in esame sono stati poi raccolti nelle tabelle 4, ed è stata per le geometrie SCF e RCF per vari valori notevoli di ρ (0.25, 0.50 e 0.75).

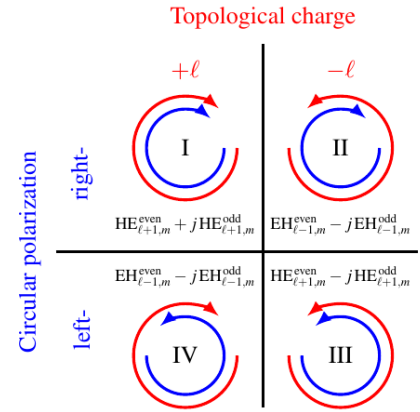


Figura 25: Rappresentazione della degenerazione degli stati $\text{OAM}_{\nu, m}^{\text{left/right}, +/-}$ ([68])

Nel caso delle simulazioni COMSOL $V_0 \simeq 4.895$ e $\rho = 0$ per la SCF, per cui ci aspettiamo che siano guidati i modi $\mathbf{HE}_{1,1}$ ⁸¹, $\mathbf{TE}_{0,1}$, $\mathbf{HE}_{2,1}$, $\mathbf{TM}_{0,1}$, $\mathbf{EH}_{1,1}$, $\mathbf{HE}_{3,1}$ e $\mathbf{HE}_{1,2}$, ossia in totale 12 *modi* contando anche le degenerazioni dei singoli modi. Per le RCF con $V_0 \simeq 4.895$ e $\rho = 0.5$, sono guidati $\mathbf{HE}_{1,1}$, $\mathbf{TE}_{0,1}$, $\mathbf{HE}_{2,1}$, $\mathbf{TM}_{0,1}$, $\mathbf{EH}_{1,1}$ e $\mathbf{HE}_{3,1}$, quindi in totale 10 *modi*. Tutto ciò risulta perfettamente coerente con quanto riportato in tabella 3, a conferma della bontà dei risultati. Osserviamo che in generale ad un aumento di ρ corrisponde un aumento del parametro V_0 di cutoff dei modi per la RCF, ma di tipo *differente* per ognuno dei modi. In particolare, l'aumento risulta più elevato per i modi con $m = 2$ rispetto che per $m = 1$, in generale: ad un valore di m crescente il valore di cutoff per un modo con ν identico risulta maggiore. Come era atteso, inoltre, il valore di cutoff V_0 per i modi $\mathbf{TE}_{0,m}$ e $\mathbf{TM}_{0,m}$ è uguale per le SCF, mentre differisce per le RCF in generale con $V_0^{\mathbf{TE}_{0,m}} > V_0^{\mathbf{TM}_{0,m}}$ per $\rho > 0$.

Mode	SCF ($\rho = 0$)	RCF ($\rho = 0.25$)	RCF ($\rho = 0.50$)	RCF ($\rho = 0.75$)
$\mathbf{TE}_{0,1}$	2.404826	2.416123	2.554378	3.166270
$\mathbf{HE}_{2,1}$	2.409395	2.420752	2.559616	3.173681
$\mathbf{TM}_{0,1}$	2.404826	2.418696	2.561830	3.180238
$\mathbf{EH}_{1,1}$	3.831706	3.834787	3.943981	4.685143
$\mathbf{HE}_{3,1}$	3.837436	3.840170	3.947250	4.686193
$\mathbf{HE}_{1,2}$	3.831706	4.447506	6.393158	12.60560
$\mathbf{EH}_{2,1}$	5.135622	5.136243	5.207888	5.976783
$\mathbf{HE}_{4,1}$	5.142031	5.142575	5.212597	5.978528
$\mathbf{TE}_{0,2}$	5.520078	5.733564	7.323629	13.35125
$\mathbf{HE}_{2,2}$	5.522073	5.735716	7.326281	13.35437
$\mathbf{TM}_{0,2}$	5.520078	5.740925	7.332793	13.35941

Tabella 4: Questa tabella riassume i valori degli cutoff per i modi della geometria SCF per $n_0^2 \simeq 1.011$ e $\rho = 0, 0.25, 0.50$ e 0.75

⁸¹questo è il modo fondamentale che risulta sempre supportato, per cui effettivamente il valore di cutoff è sempre pari a 0

Bibliografia

- [1] ANTONIO FASANO e STEFANO MARMI. *Analytical Mechanics: An Introduction*. Oxford Graduate Texts, 2006. 125–150 (cit. a p. 2)
- [2] ANDREW ZANGWILL. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012. (cit. alle pp. 2, 9, 24, 32)
- [3] RICHARD P. FEYNMAN, ROBERT B. LEIGHTON e MATTHEW SANDS. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. Addison Wesley, 2005. 125–150 (cit. a p. 2)
- [4] PETER LEBEDEV. Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes. *Annalen der Physik*, **311**: 433–458, 1901. DOI: 10.1002/andp.19013111102 (cit. a p. 2)
- [5] E. F. NICHOLS e G. F. HULL. The Pressure Due to Radiation. *Physical Review*, **17**: 26, 1903. DOI: 10.1103/PhysRevSeriesI.17.26 (cit. a p. 2)
- [6] DAVID J. GRIFFITHS. Electromagnetic Momentum. *Am. J. Phys.*, **80**: 7, 2011. DOI: 10.1119/1.3641979 (cit. alle pp. 2, 3)
- [7] JOHN DAVID JACKSON. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. (cit. alle pp. 2, 24, 26, 31, 32)
- [8] KURT LECHNER. *Elettrodinamica classica*. Springer, 2014. (cit. alle pp. 3, 4)
- [9] V. B. BERESTETSKII, L. P. PITAEVSKII e E.M. LIFSHITZ. *Quantum Electrodynamics: Volume 4 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1982. 6–18 (cit. alle pp. 5, 7)
- [10] C. V. RAMAN e S. BHAGAVANTAM. Experimental Proof of the Spin of the Photon. *Nature*, **129**: 22–23, 1932. DOI: doi:10.1038/129022a0 (cit. a p. 5)
- [11] R. I. KHRAPKO. Paradox of the Classical Beth Optics Experiment. 2007. DOI: viXra:0703.0039 (cit. a p. 5)
- [12] RICHARD P. FEYNMAN, ROBERT B. LEIGHTON e MATTHEW SANDS. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3: Quantum mechanics*. Addison–Wesley, 2005. 17.14–17.16 (cit. a p. 5)
- [13] J. H. POYNTING. The Wave Motion of a Revolving Shaft, and a Suggestion as to the Angular Momentum in a Beam of Circularly Polarised Light. *Proceedings of the Royal Society of London*, **82**: 560–567, 1909. DOI: 10.1098/rspa.1909.0060 (cit. a p. 5)
- [14] KONSTANTIN Y. BLOKH, ALEKSANDR Y. BEKSHAEV e FRANCO NORI. Dual electromagnetism: Helicity, spin, momentum, and angular momentum. *New J. Phys.*, **15**: 2013. DOI: doi:10.1088/1367-2630/15/3/033026 (cit. a p. 5)
- [15] KONSTANTIN Y. BLOKH, JUSTIN DRESSEL e FRANCO NORI. Conservation of the spin and orbital angular momentum in electromagnetism. *New J. Phys.*, **16**: 2014. DOI: doi:10.1088/1367-2630/16/9/093037 (cit. alle pp. 5, 6)
- [16] SERGEY I. KRYUCHKOV, NATHAN A. LANFEAR e SERGEI K. SUSLOV. The Pauli-Lubanski Vector, Complex Electrodynamics, and Photon Helicity. 2015. DOI: arXiv:1504.04275 (cit. a p. 5)
- [17] IWO BIALYNICKI-BIRULA E ZOFIA BIALYNICKA-BIRULA. Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts. *Journal of Optics*, **13**: 2011. DOI: doi:10.1088/2040-8978/13/6/064014 (cit. a p. 6)
- [18] DAVID L. ANDREWS e MOHAMED BABIKER. *The Angular Momentum of Light*. Cambridge University Press, 2012. (cit. alle pp. 6, 7, 9–11)
- [19] S.J.VAN ENK E G.NIENHUIS. Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum. *Journal of Modern Optics*, **41**: 963–977, 1994. DOI: 10.1080/09500349414550911 (cit. a p. 6)

- [20] E. LEADER e C. LORCE. The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter? *Physics Reports*, **541**: 163–248, 2014. DOI: doi:10.1016/j.physrep.2014.02.010 (cit. alle pp. 6, 7, 12)
- [21] N. R. HECKENBERG, M. E. J. FRIESE, T. A. NIEMINEN e H. RUBINSZTEIN-DUNLOP. Mechanical effects of optical vortices. 2003. DOI: arXiv:physics/0312007 (cit. a p. 6)
- [22] A. T. O'NEIL, I. MACVICAR, L. ALLEN e M. J. PADGETT. Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam. *Physical Review Letters*, **88**: 2002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.053601 (cit. a p. 6)
- [23] KONSTANTIN Y. BLOKH, MIGUEL A. ALONSO, ELENA A. OSTROVSKAYA e ANDREA AIELLO. Angular momenta and spin-orbit interaction of nonparaxial light in free space. *Phys. Rev. A*, **82**: 2010. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.063825 (cit. a p. 7)
- [24] LUKAS NOVOTNY *Lecture Notes on electromagnetic fields and wave* University Lecture notes https://www.photonics.ethz.ch/fileadmin/user_upload/Courses/EM_FieldsAndWaves/CompleteNotes.pdf 2013 (cit. a p. 8)
- [25] DONGMEI DENG e QI GUO. Airy complex variable function Gaussian beams. *New Journal of Physics*, **11**: 2009. DOI: 10.1088/1367-2630/11/10/103029 (cit. a p. 9)
- [26] JUAN P. TORRES e LLUIS TORNER. *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*. Wiley, 2011. (cit. a p. 9)
- [27] RUDIGER PASCHOTTA. *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley-VCH, 2008. (cit. alle pp. 9, 10, 17, 19, 24, 27, 28, 41)
- [28] T. D. VISSERA e E. WOLFC. The origin of the Gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields. *Optics Communications*, **283**: 3371–3375, 2010. DOI: 10.1016/j.optcom.2010.04.099 (cit. a p. 10)
- [29] L. ALLEN e M. J. PADGETT. The Poynting vector in Laguerre–Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. *Optics Communications*, **184**: 1909. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00960-3 (cit. alle pp. 10, 12)
- [30] I. V. BASISTYI, M. S. SOSKIN e M. V. VASNETSOV. Optical wavefront dislocations and their properties. *Optics Communications*, **119**: 604–612, 1995. DOI: 10.1016/0030-4018(95)00267-C (cit. a p. 10)
- [31] MILES PADGETT, JOHANNES COURTIAL e LES ALLEN. Light's orbital angular momentum. *AIP Publishing*, **57**: 2004. DOI: 10.1063/1.1768672 (cit. a p. 11)
- [32] L. ALLEN, M. W. BEIJERSBERGEN, R. J. C. SPREEUW e J. P. WOERDMAN. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, **45**: 1992. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185 (cit. a p. 12)
- [33] CHUN-FANG LI. Angular momentum of non-paraxial light beam: Dependence of orbital angular momentum on polarization. 2009. DOI: arXiv:0909.2306 (cit. a p. 12)
- [34] G. F. CALVO, A. PICON e E. BAGAN. A Quantum Field Theory Twist to Photon Angular Momentum. 2005. DOI: arXiv:quant-ph/0509040 (cit. alle pp. 12–14)
- [35] DAN C. MARINESCU e GABRIELA M. MARINESCU. *Classical and Quantum Information*. Academic Press, 2011. (cit. alle pp. 13, 15, 17)
- [36] I. B. DJORDJEVIC. Multidimensional QKD Based on Combined Orbital and Spin Angular Momenta of Photon. *Photonics Journal*, **5**: 1909. DOI: 10.1109/JPHOT.2013.2292301 (cit. a p. 14)
- [37] MEHUL MALIK e ROBERT W. BOYD. Quantum Imaging Technologies. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 2014. DOI: 10.1393/ncr/i2014-10100-0 (cit. a p. 14)
- [38] ALOIS MAIR, ALIPASHA VAZIRI, GREGOR WEIHS e ANTON ZEILINGER. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, **412**: 313–316, 2001. DOI: 10.1038/35085529 (cit. a p. 14)
- [39] MARIO KRENN, ROBERT FICKLER, MATTHIAS FINK, JOHANNES HANDSTEINER, MEHUL MALIK, THOMAS SCHEIDL, RUPERT URSIN e ANTON ZEILINGER. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna. *New Journal of Physics*, **16**: 2014. DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028 (cit. alle pp. 14, 15)
- [40] PADGETT MJ e COURTIAL J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Opt Lett.*, **24**: 430–432, 1999. DOI: 10.1119.7014 (cit. a p. 14)

-
- [41] GIOVANNI MILIONE, H. I. SZTUL, D. A. NOLAN e R. R. ALFANO. Higher-Order Poincaré Sphere, Stokes Parameters, and the Angular Momentum of Light. *Phys. Rev. Lett.*, **107**: 2011. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.053601 (cit. a p. 14)
- [42] R. L. RIVEST, A. SHAMIR e L. ADLEMAN. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Magazine Communications of the ACM CACM*, **22**: 120–126, 1978. DOI: 10.1145/359340.359342 (cit. a p. 15)
- [43] STEPHEN BARNETT. *Quantum Information*. Oxford University Press, 2009. (cit. alle pp. 15, 16)
- [44] SHENGMEI ZHAO, LONGYAN GONG, YONGQIANG LI, HUA YANG, YUBO SHENG, XIAOLIANG DONG, FEI CAO e BAOYU ZHENG. Experimental realization of large-alphabet quantum key distribution protocol using orbital angular momentum entanglement. 2012. DOI: arXiv:1205.0851 (cit. a p. 16)
- [45] MOHAMMAD MIRHOSSEINI, OMAR S. MAGAÑA-LOAIZA, MALCOLM N O’SULLIVAN, BRANDON RODENBURG, MEHUL MALIK, MARTIN P. J. LAVERY, MILES J. PADGETT, DANIEL J. GAUTHIER e ROBERT W. BOYD. High-dimensional quantum cryptography with twisted light. *New J. Phys.*, **17**: 1909. DOI: 10.1088/1367-2630/17/3/033033 (cit. a p. 16)
- [46] GOVIND P. AGRAWAL. *Fiber-Optic Communication Systems*. Wiley, 2010. (cit. alle pp. 17–22, 27, 37)
- [47] K. S. THYAGARAJAN e AJOY GHATAK. *Fiber Optic Essentials*. Wiley-IEEE Press, 2007. (cit. alle pp. 17–19, 21, 28)
- [48] ITSURO MORITA, KOJI IGARASHI, HIDENORI TAKAHASHI, TAKEHIRO TSURITANI e MASATOSHI SUZUKI. Trans-oceanic class ultra-long-haul transmission using multi-core fiber. *Optics Express*, **22**: 31761–31773, 2014. DOI: 10.1364/OE.22.031761 (cit. alle pp. 18, 19)
- [49] NTT. World Record One Petabit per Second Fiber Transmission over 50 Km. 2012. (cit. a p. 18)
- [50] AJOY GHATAK e K. THYAGARAJAN. *An Introduction to Fiber Optics*. Cambridge University Press, 1998. (cit. alle pp. 20–22)
- [51] VENKAT VENKATARAMANAN *Optical amplifiers* <http://www.ee.ryerson.ca/~courses/ee8114/optical-amplifiers-venkat.pdf> 2014 (cit. a p. 23)
- [52] VASUDEVAN LAKSHMINARAYANAN, MARÍA L. CALVO e TATIANA ALIEVA. *Mathematical Optics: Classical, Quantum, and Computational Methods*. CRC Press, 2012. (cit. alle pp. 24, 25)
- [53] ULF LEONHARDT e THOMAS PHILBIN. *Geometry and Light: The Science of Invisibility*. Cambridge University Press, 2010. (cit. a p. 25)
- [54] BLIOKH e AIELLO. Goos–Hanchen and Imbert–Fedorov beam shifts: an overview. *Journal of Optics*, **15**: 2013. DOI: 10.1364/OL.34.000389 (cit. a p. 25)
- [55] LEV D. LANDAU e EVGENIJ M. LIFSITS. *Elettrodinamica dei mezzi continui*. Editori riuniti, 2011. (cit. a p. 26)
- [56] C. PEUCHERET *Elements of electromagnetic theory, anisotropic media, and light modulation by the linear electro-optic effect* Notes collected at Danmarks Tekniske Universitet http://web-files.ait.dtu.dk/cpeu/download/34153_E2011_CPEU_Electro_Optic_Modulation.pdf 2014 (cit. a p. 26)
- [57] BAHAA E. A. SALEH e MALVIN CARL TEICH. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure e Applied Optics, 2007. (cit. alle pp. 27–29, 35, 39, 40)
- [58] EUGENE HECHT. *Optics*. Addison-Wesley, 2001. (cit. a p. 27)
- [59] J. C. KNIGHT, T. A. BIRKS, P. ST. J. RUSSELL, e D. M. ATKIN. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Optics Letters*, **21**: 1547–1549, 1996. DOI: 10.1364/OL.21.001547 (cit. a p. 29)
- [60] PHILIP RUSSELL. History and Future of Photonic Crystal Fibers. *Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference*, **5**: 267–270, 2009. DOI: 10.1364/OFC.2009.0TuC1 (cit. a p. 29)
- [61] PHILIP RUSSELL. Photonic Crystal Fibers. *Science*, **299**: 358–362, 2003. DOI: 10.1126/science.1079280 (cit. alle pp. 29, 43)
- [62] JOHN D. JOANNOPOULOS, STEVEN G. JOHNSON, JOSHUA N. WINN e ROBERT D. MEADE. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, 2008. (cit. alle pp. 30, 42)
- [63] WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Publishing Company, 2006. (cit. a p. 31)
-

- [64] C. BRUNET, B. UNG, P. BELANGER, Y. MESSADDEQ, S. LAROCHELLE e L.A. RUSCH. Vector Mode Analysis of Ring-Core Fibers: Design Tools for Spatial Division Multiplexing. *Journal of Lightwave Technology*, **32**: 4648–4659, 2014. DOI: 10.1109/JLT.2014.2361432 (cit. alle pp. 32, 35, 36, 42, 43, 52)
- [65] KATSUNARI OKAMOTO. *Fundamentals of Optical Waveguides*. Academic Press, 2005. (cit. a p. 34)
- [66] SIDDHARTH RAMACHANDRAN e POUL KRISTENSEN. Optical vortices in fiber. *Nanophotonics*, **2**: 455–474, 2013. DOI: 10.1515/nanoph-2013-0047 (cit. alle pp. 36, 37)
- [67] MAURITZ ANDERSSON, EILERT BERGLIND e GUNNAR BJÖRK. Orbital angular momentum modes do not increase the channel capacity in communication links. *New Journal of Physics*, **17**: 2015. DOI: 10.1088/1367-2630/17/4/043040 (cit. a p. 36)
- [68] CHARLES BRUNET, PRAVIN VAITY, YOUNÈS MESSADDEQ, SOPHIE LAROCHELLE e LESLIE A. RUSCH. Design, fabrication and validation of an OAM fiber supporting 36 states. *IEEE Photonics Journal*, **22**: 26117–26127, 2014. DOI: 10.1364/OE.22.026117 (cit. alle pp. 36, 52)
- [69] P. GREGG, P. KRISTENSEN e S. RAMACHANDRAN. Conservation of orbital angular momentum in air-core optical fibers. *Optical Society of America*, **2**: 267–270, 2015. DOI: 10.1364/OPTICA.2.000267 (cit. a p. 36)
- [70] AGHAIE K.Z., EDWARD L. GINZTON, DANGUI V., DIGONNET M.J.F., SHANHUI FAN e KINO GORDON S. Classification of the Core Modes of Hollow-Core Photonic-Bandgap Fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **45**: 1192–1200, 2009. DOI: 10.1109/JQE.2009.2019767 (cit. a p. 50)
- [71] CHARLES BRUNET, BORA UNG, LIXIAN WANG, YOUNÈS MESSADDEQ, SOPHIE LAROCHELLE e LESLIE A. RUSCH. Design of a family of ring-core fibers for OAM transmission studies. *Opt. Express*, **23**: 10553–10563, 2015. DOI: 10.1364/OE.23.010553 (cit. a p. 52)
- [72] P. BOFFI, P. MARTELLI, A. GATTO e M. MARTINELLI. Mode-division multiplexing in fibre-optic communications based on orbital angular momentum. *Journal of Optics*, **15**: 2013. DOI: 10.1088/2040-8978/15/7/075403 (cit. a p. 52)